译者的话

运筹学是一门使用数学方法的新兴的应用性科学。它的形成甚至还在计算机的问世和控制论的基本概念成型之前。它的产生主要是同军事问题相关联的，发生于第二次世界大战的初期。（例如英美等同盟国海军航空兵对付德国潜艇战的活动、在直布罗陀海峡上空建立“屏障巡逻”、合理布署军力、调运物资、高效率使用雷达等新式武器系统等实际例子。）不过，运筹的方法在和平时期仍然有着广泛的用途。因此，它在战后在新的基础上继续顺利而快速地发展着，并在英、美等国逐渐被应用于工农业生产之中。

我国大规模地开展运筹学的研究和应用，始于1958年。随后，我国的运筹学工作者又在大量实践的基础上，为适应工农业生产多快好省发展的要求，在1965年开展了推广、应用统筹方法的群众运动。近几年来在我国许多地区和部门得到迅速推广和普遍应用的优选法，就是它成效卓著的证明之一。

依照研究现象的特点，在运筹学中使用了数学中的许多分科，如：代数、分析、概率论、数理统计、数理逻辑等等。它也使用了“建立模型”的实验性模拟方法。在运筹学发展过程中，逐渐形成了一些各具特色的典型问题，与此同时，也产生并发展了解决典型问题的一些专门的数学手段和

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

方法，如：线性规划、动态规划，服务系统理论，统计方法理论，最后还有对策的数学理论——即《全能战略家》一书的论题。在该书的酝酿和编写过程中，曾经有对策论和运筹学其它部门的许多卓越的美国学者、专家积极参加了工作。威廉斯的这部著作，以通俗易懂而引人入胜的形式，对对策论（又名“博奕论”）所研究的“对策现象”中三个最根本的要素，即：局中人、策略、对策的得失，进行了反复而由浅入深的详细阐述。它同时还介绍了各种对策的分类及其解法。本书中各种实例琳琅满目。实际上，全部的叙述也就是建立在实例之上的。在研究这些实例时，读者务必记住：每个实例介绍的都是一种规定类型的问题。

《全能战略家》对读者所要求的仅限于包括有负数概念的普通算术的数学知识水平，正文中没有专用的数学符号。这是此书截然不同于艰深的学术性著作的突出优点之一。另外，看来作者为了要荫蔽对策论中那些被禁止公开的实际应用，而特意采取了一种寓言式的幽默语言。尽管如此，作者介绍的许多问题在远非戏谑性的实践中却是我们经常能够遇得到的。在各章的末尾，作者还为具备起码数学修养的读者提供了大量的练习题，以帮助他掌握各类型对策的解法。

威廉斯的这部著作读起来是较为轻松的。实际上，对策论研究的对象比较由本书所能了解的范围要广阔得多，但本书作为对策论的较出色的一本入门读物却是当之无愧的。我们也热切地期望它对在我国普及对策论——运筹学的数学方法，将有所裨益。

译　　者

一九八三年四月

序　言

写作这本书的念头产生于一次有许多专家参加的谈话之际，这些人都已多年从事于研究发展和应用对策论的问题。虽然这些人直接和首先感兴趣的是对策论在军事上，特别是在空军中的应用的问题，可是他们的间接的兴趣却显然要广泛得多，实际上漫无止境。

研讨的意思在于：如果有许多人能够认识到对策论的实质，那么对策论就会获得优越地位，同时这些人也将能够从对对策论的认识中获得好处。目前只有一批很少的从事发展对策论的职业家才了解它。另外一批数量大得多的人，经常听说它，虽然往往只是相当朦胧地想象它的目标和特点。而且这些人的代表者，根据不充分的知识，被迫接受或拒绝对策论的思想。因此，似乎值得尝试架设一座跨越深渊的桥梁，将深渊所分隔的职业性的献身学者的数学业务同由于无缘得知数学奥妙的略有知识的涉猎者被迫盲目的应付方法两者沟通起来。

由于认识到这场谈话不可就此而止，大家便决定委托某个人来编写这么一本书。当他们挑选了许多出色的，但多少有点分散的候选人之后，我惊讶地发现自己被选中了。也许应该列举一下那些使我在这次选择中取胜（或是输掉）的因素：首先，我总是在一旁，大家都觉得容易接近；这是每个

科学工作者都明白的，管理人总是在一旁的。其次，若干年来，虽然我对于对策论方面的工作是深感兴趣的，但是，在其大部份最重要的技术方面，我仍旧是非常无知的，在编纂此书的时候未必需要懂得足够多的东西，以致把本来要介绍给读者的材料糟蹋了。第三，无论是从组织观点来看，或是出于天生爱好保重精力的缘故，我都占着上风；这使我有可能不受拘束地向我的同僚们请求帮助和咨询。看来，这样的工作分工使所有人都满意了。

关于本书的性质、目的和体裁，随之还有它的读者，我的想法在编纂中曾经有过数次改变。最后看来我们是写成了一册初级读物——对策论的自修课本。我们期望你们打开它，同时克服那些任何智力活动都会带来的自然而然的困难（那是些折磨人的，但不是要命的困难），从而学会表述和解答符合对策论原则的简单问题。

我们似乎觉得能够做到这样就已经相当不错了。我们还期望所引用的实例足以引人入胜，因为它们就是为了激发想象力而写的。我们从形形色色的业务部门获得这些例子的资料，目的是希望能鼓励你们从对策论的角度去研究你们本身的一些问题。由于这些例子往往内容贫乏，而且语调多少不恭，对于它们大概是再没有什么可袒护的了。要使这些例子同时做到既简单易懂又内容丰富，是困难的，而它们的语调首先是庇护我们的实例所涉及的各部门的专家（他们当然明白其内容的贫乏），其次也是抑制读者昏昏欲睡的手段。

本书中包含的数学不超出包括有负数概念在内的普通算术的范围。换句话说，对读者所要求的一切仅仅是会正数、负数（并且通常是整数）的加、减、乘、除而已。正文中没有数学的专用符号——这是本书的优点——虽然这也给作者

造成了极大的困难。但是，一定不要存在一种错觉：并非每个人（即使他有强烈的热望），都能学会表述和解答对策论的难题的，因为它终究是一门很复杂的科学。不过，许多人都能够学会如何了解某些问题。更多一些人将能够认清理论的条件和范围。

我们认为，随着对策论的发展，它一定能成为最重要的研究方法之一，并且深深地渗透入生活的许多领域。为了使这个愿望变为现实，还必须实现若干条件。其中一个条件就是要使对策论的潜在应用者能够了解其内容，并且获得它今天所能给予的一切，或者向对策论提出这样那样的问题，以帮助他了解其发展趋向，最终使它能给他以真正的帮助。

我非常惶恐，担心不能充分表达出自己的感激之情。我曾经毫不客气地要求我的所有朋友，特别是我的同事们，为实例出主意。我常常采纳了这些主意，而且以极为荒诞的形式加以应用，同时使用着与我的诸位施惠者名字相似的（有时是相同的）主人公的名字。这使得编纂此书的寂寞的工作稍见愉快些，因此，他们是给予我双倍的帮助。

尽管担心在列举时会遗漏掉谁（当你有这么多的债主时，这是难免的），但乃未能阻止我试图公布所有的债务。首先，兰德公司的M·I·德列谢尔和J·K·玛奇金（原在兰德公司任职，而后在斯坦福大学工作）提供了给人深刻印象的手稿，其中综合了我的同事和其他作者的数十篇论文，在写作过程中给予我异常宝贵的帮助。

我还极感激那些提供了个别主意的人，他们是兰德公司的R·I·贝尔曼、R·L·贝尔杰、H·K·多克、J·M·德斯琼、W·H·弗列米格、D·R·福尔克逊、墨里威·豪斯涅尔、奥拉弗·黑尔梅、C·M·约翰逊、亚伯拉罕·

卡柏兰、A·M·莫德、I·W·皮克逊、I·C·格瓦德、R·D·斯培豪特和J·维德，以及加利福尼亚大学的I·W·巴拉京、戈华德大学的D·H·柏列库埃尔，威斯康星大学的C·K·克里宁，普林斯敦大学的奥斯卡尔·摩尔根丝德尔和A·W·特克尔，马萨诸塞理工学院的F·M·摩尔兹，密执安大学的R·M·特洛尔和乔治·华盛顿大学的K·B·汤姆金斯。

除了以上所举出的这些人外，还有下列个人审阅了手稿并为之作了注述（其中许多人是极详细地）。他们是兰德公司的贝尔兰德·布洛吉、J·W·柏拉乌、R·W·克留依特、F·R·科尔柏姆、J·B·丹特吉格、M·M·佛鲁特、O·A·格洛丝、K·小汉斯金格、B·W·黑敦、C·P·杰弗利丝、G·B·肯尼迪，J·A·克尔索、J·C·小琼格和R·A·瓦格涅尔，以及加利福尼亚大学的I·F贝科巴合、退伍少将J·R·库克，哈佛大学的K·F·摩斯特列尔，大概还有其它一些人。

我尤其要感谢洛克菲勒基金会的沃列·威维尔，他激于友谊和对问题的兴趣，曾非常详细地审阅了手稿。他对叙述明确的率直要求，始终有着重大的价值，但有时这种要求也使我感到懊丧，尤其是当他的风格和技巧用于使问题达到明晰方面，比较我是大为高明之际。

兰德公司准许我组织自己的公务，以使我有机会完成自己的工作并编写成此书。

不言而喻的是，这样一本小书的作者受惠于如此众多的人，他唯一有权自居为己物的，仅止是本书中存在的错误而已。在这种情势下，但愿《全能战略家》毫不迟延地与自然结成联盟，并且与它分担这些错误的责任。

J·D·威廉斯

目　　录

序言……………………………………………………（1）

第一章　绪论……………………………………………（1）

问题的本质……………………………………………（1）

一个史例………………………………………………（6）

某些教训和比较………………………………………（7）

有关方法的若干评语…………………………………（10）

局中人…………………………………………………（14）

支付……………………………………………………（17）

策略……………………………………………………（19）

支付矩阵表……………………………………………（21）

保密的假设……………………………………………（23）

标准……………………………………………………（25）

例一：旅行者…………………………………………（28）

第二章　两种策略的对策………………………………（34）

2×2对策………………………………………………（34）

引言……………………………………………………（34）

随机偏差………………………………………………（35）

鞍点……………………………………………………（41）

混合策略………………………………………………（43）

相对频数………………………………………………（47）

确定相对频数的法则……………………………………（48）
对策的得失……………………………………………（53）
改变规模的影响………………………………………（54）
以优对劣的对策………………………………………（56）
例二：轰炸行动………………………………………（57）
例三："达依克威里"鸡尾酒会……………………（58）
例四：语言游戏………………………………………（61）
例五：进攻和防御……………………………………（62）
例六：在音乐厅近处会面的问题……………………（63）
例七：暗房……………………………………………（64）
例八：生日……………………………………………（66）
例九：街头小贩………………………………………（67）
例十：警车……………………………………………（69）
关于2×2对策解法的结论……………………………（72）
练习一…………………………………………………（76）
2×m对策……………………………………………（79）
鞍点……………………………………………………（79）
优势……………………………………………………（80）
混合策略………………………………………………（82）
图解法…………………………………………………（86）
例十一：文字游戏……………………………………（88）
例十二：比赛的招数…………………………………（89）
例十三：优质电唱机…………………………………（93）
抛签法（随机机械论）………………………………（95）
关于2×m对策解法的结论…………………………（97）
练习二…………………………………………………（99）
第三章　三种策略的对策……………………………（104）

3×3对策……………………………………(104)
劝谕性的插话……………………………………(104)
鞍点……………………………………(106)
优势……………………………………(107)
对策的得失……………………………………(109)
三种积极策略……………………………………(110)
你最好别遇上的几种策略……………………………………(115)
例十四：“石头——纸——剪刀”游戏……………………(120)
例十五：燃料问题……………………………………(122)
例十六：继承人……………………………………(123)
例十七：分配畜产主财产……………………………………(126)
例十八：约会……………………………………(129)
关于3×3对策解法的结论……………………………………(130)
练习三……………………………………(131)
3×m对策……………………………………(135)
解法……………………………………(135)
例十九：海鲈鱼和教授……………………………………(145)
例二十：同病人打交道的本领……………………………………(148)
例二十一：象棋手……………………………………(152)
关于3×m对策解法的结论……………………………………(154)
练习四……………………………………(155)
第四章　四种及更多种策略的对策……………………(160)
借助猜测求解……………………………………(160)
鞍点……………………………………(163)
优势……………………………………(163)
全部策略都是积极策略时的情况……………………………………(164)
例二十二：一辆旧汽车……………………………………(177)

例二十三：喷雾器……………………………………………(179)
例二十四：彩色扑克牌…………………………………………(182)
例二十五：大孩子的游戏………………………………………(184)
例二十六：法庭执行员…………………………………………(186)
例二十七：猜币游戏……………………………………………(188)
例二十八："管理方面的"抉择………………………………(191)
例二十九：伯罗托上校的问题…………………………………(194)
例三十："莫拉"游戏…………………………………………(199)
例三十一：迷宫…………………………………………………(202)
例三十二：梅琳…………………………………………………(204)
关于4×4对策解法的结论……………………………………(207)
练习五……………………………………………………………(209)
第五章　各种意见………………………………………………(218)
近似法……………………………………………………………(218)
再谈优势…………………………………………………………(226)
简单解……………………………………………………………(229)
多种解……………………………………………………………(233)
练习六……………………………………………………………(235)
关于测定支付值的问题…………………………………………(235)
支付值的质量评估………………………………………………(243)
例三十三：鲍细霞………………………………………………(247)
例三十四：淑女或猛虎…………………………………………(249)
通常只进行一次的对策…………………………………………(252)
对称的对策………………………………………………………(254)
线性规划…………………………………………………………(257)
例三十五：饮食制………………………………………………(258)
非零和对策………………………………………………………(261)

结论……………………………………………………………(263)
附录
随机数表………………………………………………………(267)
练习的解答……………………………………………………(274)
文献……………………………………………………………(282)

"……然而我深信，详细考察这些东西时，读者必定很快看到其中不仅有普通的游戏，而且还有饶有兴味并且发人深省的原理。"

惠更斯　1657年

第一章　绪　论

问题的本质

尽人皆知，现在一本书开头的方法是很多的。其中多数详细考察起来简直是糟糕。但是有一种想法使我们很苦恼，即这中间有一两个具有如下优点的方法现在却弃而不用：读者们被作者打算述说的纯粹是平庸枯燥的东西（虽然他们也不怀疑这一点）所感染，同时这在他们听来如同洛列莱①的召唤一般。此后，读者们便分成为两派。第一派，比较广泛和幸运，甚至即使有不可胜数的困难威胁着他们，他们也仍手不释卷地看完最后一页。尔后，这些人总是善意地思考和评论它，而且，毫无疑问地，他们还将在自己的每个房间里都摆上一本。对第二派的较简略的评价是：它同第一派是有区别的。对这一派读者来说，书本如同消释所有令人不快的嗜好的强力催眠药一样。他们睡眼惺松地把书搁到一旁，留下的唯一念头是快快将它赠送给随便什么人。

①洛列莱为美丽的女妖。见德国诗人海涅的诗《洛列莱》。——汉译者注。

倘若我们能够想得出开篇的类似策略，那么这中间就已经出色地具体体现了我们这本书的主题和目的。因为在全书中，我们将要研究选择最优策略的方法，甚至包括“策略”这个字眼不同于通常含义的运用的那些情况。

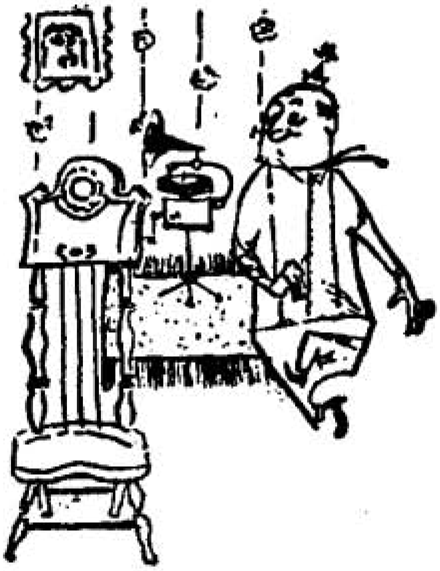
我们感兴趣的是人们追求彼此对立的目标时的状况，简言之，是冲突的情势。关于本书如何开头的问题，显然完全属于冲突情势之列，因为作者和读者的利害也是对立的，当然不是尖锐的，然而却是毫无疑义地对立着。要知道，我们所期望的是将你们吸引到思维工作的艰辛过程中来，可是，你们是审慎的人，操心的其它事儿已经够多的了，你们所渴望的只是休息或者满足自己的好奇心。类似的利害冲突就是我们将要研究的那些情势的实质。

在我们这种情况中，同样存在的另一个因素也是极重要的：我们每个人都能够在某种程度上支配情势。比如说，你们能用这本书狠掷猫儿，以此激怒作者也罢，猫儿也罢，这样做付出的部分代价是多多少少有损自尊心，而且毫无疑问地恶化跟猫的关系。你们摆脱困难的另一种方法是——绕过难懂的地方，走马看花地浏览一下，如此等等。而作者也有若干支配之法，例如选择内容和叙述方式……不过，这就不

必多说了……在我们的例子中还有一些其它特殊的因素：情势的某些方面既不服从于你们，也不服从于我。譬如，我们往昔生活中的许多事件，以及外部形形色色的相互作用，在编纂和阅读此书时，都能够起极重要的作用。

探寻本书开篇的最优方法的这个私人问题还具有其它特点，这些我们就不多讲了。此外，这个题目是极难的，否则，我们早就把它解决了。

因为涉及问题的内容的限制并不多，而且不是绝对的，所以就能够得到一个结论：我们预备研究的冲突情势的范围之广泛是值得注意的。对研究战神同地球交换氢弹，或者是芭列特—柏拉乌尼格①式的爱情故事，在原则上是没有任何异议的。竞赛可以是按经济的特点（进行的），也可以乃是“音乐圈椅”的游戏②。或者也可以是一般战争过程中发生的无数战斗之中的一场小战斗。尽管我们的方法对于上述各种冲突情势都可能是有效的，但是，并不能因此而得出结论说，我们具有一种包医上述所有方面策略上灾祸的专利药物。



我们所介绍的这个方法有一个美妙的名称：对策论。假如你们是头一

① 艾丽札别格·芭列特—柏拉乌尼格（1800—1861）——英国女诗人，宗教劝善叙事诗的作者。——俄译者注。

② 在这个游戏中，若干个游戏者伴随着音乐围绕少数几张圈椅操练步法，音乐刚一停止，每个人就力争在椅子上占个位子。——俄译者注。

回见到这个不可思议的词组，那么，你们显然立即会产生一个问题：为什么？这个理论之所以得到这么个名称是由于研究游戏、竞赛、竞争，是研究策略的有益出发点。但是，这样的回答也无济于事，因为又会产生一个：为什么？

这是因为游戏（竞赛）包含着许多对于一切冲突来说是共同的东西，而且它们比较容易加以描述和研究。（在用对策来作理论命名的情况下，我们将把任何一种冲突都称为对策，如果是从这个理论角度来研究它的话。）

为了举例说明这个意思，我们将要研究一下扑克游戏，同时注意它的那些(比如对于军事冲突来说也具有的)特点。总之，你们与其它四个人研究着自己的对手，无疑地是期望获胜的。我们立刻可以发现，各个游戏者的利害是对立的：每人都希望获胜，而且因为一方的胜利必定意味着其它人的失败，所以各个游戏者的利害正是相互对立的。这就造成了冲突的基础。我们发现对策的某些因素完全取决于个人的选择，而且处于你们的充分控制之下。因为这一点对每个游戏者来说都是公道的，那么，可见还存在有一些因素是你们不能控制的，更糟的是，它们是由那些利害关系与你们敌对的人们所控制的。最后，还有这样一些因素，按照规则不受任何一方游戏者的支配，譬如全副纸牌中各张牌的序列。这些因素可以看成是受着自然① 的统制，这个自然是严肃性和稳定性的体现，稍微带点嘲弄意味地对待你们重要的事情，不过同你们并非蓄意作对。任何一种冲突情势的这些特点全是人所共知的。

---

① 作者在这里及以后所指"自然"的意思是现实生活中许多现象的偶然性质（随机特征），而且，显见得是为了述说的方便，使它具有特定的含义。——俄译者注。

另一个重要因素是情报状况，或者按军事术语说是侦察状况，这种侦察通常是不完善的，因此就会带来许多伤脑筋的事儿：我们不晓得邻人手里拿的什么牌。同时，在你和你的对手都想法在有关你们的意图和力量方面迷惑对方时，有可能受骗上当。你还能想出其它类似情形——这些有时甚至能使人灰心丧气。

不过，这些类比也不应当扯得太远。你们可以回想一下军事的许多特点，这些特点在打扑克时，无论如何也反映不出来。有时，在战斗中，一辆坦克能击毁两辆坦克，可是，两张杰克〈J〉牌永远只赢一张爱司〈A〉牌。当然，也能够将扑克变个花样，使它在翻牌也有类似的可能性。譬如说，可以订一条规则，规定每次一张爱司〈A〉牌永远赢任何的“一双”，直至杰克〈J〉牌，只要是在翻牌时响起某一玩牌人的妻子打来的电话铃声的话。然而，游戏并不能够反映军事行动或是日常生活中许多冲突情势的全部复杂性，这仍是一个事实。正因为这样，它们仅是用来充当研究策略的出发点。要知道，在探讨理论的最初阶段不可能同时研究许多错综复杂牵扯在一起的因素。

不过，看来很显然，在游戏（竞赛）中包含有在几乎任何一个重要的冲突情势中都具有的若干基本要素。这是否意味着，我们由研究娱乐游戏开始，便会获知许多有益的东西呢？未必。可以证明，军事、经济和社会的情况是如此复

杂，对它们施用儿戏式的观念是不行的。何况在目前现有的对策理论想必还没有能力应付真正的娱乐游戏——如果不把它们加以简化的话。因此，今天我们只局限于很简单的真正游戏和诸如扑克之类复杂游戏经过阉割的说法范围之内。

看来似乎真是奇怪：居然有人花费宝贵的精力来研究和发展对策论，甚至于打算把你也引入这个事业。研究对策论的原因是我们由过去取得的成就中获得的希望和信心。须知，探讨用人为的方法加以简化的理论是一种最重要的科学方法，尤其是在广泛运用数学分析的所谓精密科学之中。假如说，生物物理学家能够成功地采用细胞的简化模型，宇宙学家能够成功地应用宇宙的简化模型，那么，我们可以有充分的理由指望简化的游戏（对策现象）能够成为较复杂的冲突的有价值的模型。

无疑地，同类理论的死亡率高于任何一个军事组织在自己行动的时候所能经受的死亡率，而且就连十分成功的理论实际上也远非永生不死。对这种理论所能指望的至多不过是它在适当时候对某些有限的复杂问题的适用性。

一 个 史 例

回忆一下一个成功的科学的抽象，一个可以当做大胆的高度简化的实例，大概是有益处的。

假定说，为着研究太阳系天体的运动规律，我们可以用一个点代替一个天体。再假定每个点都具有相等于它所代替的那个天体的质量。每一对点经受着相互吸引力。将一个点的质量乘另一个点的质量，再用两点的距离的平方数除这个积，我们便可以计算出吸引力。最后，假定我们可以忽视其余的一切，假定我们的理论还并非很不高明，要不然的话，

我们早就把它给忘了。

这个万有引力理论在两百五十年期间对于预测行星的运动是确实够用的，而且这是在方位天文学方面的专家们不断地查验的情况下，应该切实承认，这些专家们已使准确度达到了极限。同这理论最令人不快的分歧发生在水星轨道方面。由于无法解释的原因，水星在一百年之间偏离了预定的抛物线达五千分之一弧度。这表明了理论归根到底只是近似的。经过爱因斯坦深入研究而成为完善的理论，才使这分歧获得了解释。

某些教训和比较

以上所述万有引力定律的诸因素，当然并非是苹果掉落在牛顿头上后，他脑瓜里一下子想出来的。在这以前，主要赖有第谷·布拉赫的著作，人们已经有了许多关于行星真实行动方面的知识。刻卜勒从中得出了若干简单定律。由于自己掌握了这全部知识，并向数学新发明——微分学求助，牛顿才很快就获得了上面提到的抽象。不幸的是，他立即应用它来研究月球的运动。由于计算与实际情况不相符合，他有好几年对自己的理论不满意。

在这个例子中包含着一些对我们有益的教训。第一是，理论也许是很简单的，可是被它们用做模型试验的各种现象却远非那么简单。无论哪一个假设说行星的运动是受简单规律控制的人，都不敢预言行星的位置。我们的前辈是有

足够根据称之为“漂泊者”①的。第二个教训是，理论或许是包罗万象，非常概括的，但切莫以为它只开花不结果。万有引力定律比较我们以上指出的，有更广泛的用途，这是由于它适用于一切具有质量的质点，而不仅止适用于太阳系的天体。第三个教训是，理论往往是，甚至通常都是不完善的，虽然用以举例的理论在这方面看来是异常好的。其次一个很重要的教训是，理论所涉及的仅是许多能够影响物体运动，从而使我们感兴趣的诸因素中的一个因素，况且这个因素还常常会被忽视。譬如说，排成密集队形飞行的两架飞机之间的吸引力，只等于长度为一点五毫米的香烟灰烬的重量。

还有一个教训牵涉到的问题是，自己拥有重要的科学资料显得多么要紧。在这方面，牛顿当时的境况比较我们这些正尝试在诸如冲突这方面建立抽象概念的人来多少好些。要知道，我们拥有的大多数资料都与各别的人们、他们的生理和智能的构成、身体状况、能力等等方面有关，而在较小得多的程度上与社会集团的综合评定有关。人们之间的相互关系，如社团中的各个人之间的关系或者各个社团之间的关系，尚未在多少过得去的范围里得到研究。而这些相互关系恰恰就是产生冲突的材料。

最后一个教训，或者至少一个有益的评语，是这样一个事实：牛顿差不多是同时创立了万有引力定律和数学的新分科——微分学，而如果缺少后者的话，该定律实际上就将是不适用的。在二百五十年期间，微分学确实在所有的物理科学中发挥了决定性的作用。认真思索一下这个问题是极为吸

① 英国古代称那些行踪不定的恒星、行星为漂泊者（流浪汉）。——俄译者注。

引人的：对策论是否也将导致一门在研究人与人之间相互关系方面能够发挥类似作用的数学新学科的诞生呢？要断言这一点，还为时过早。这是因为到目前为止，能够认为是全新的东西还很少，而在许多方面却能够识别出来自现有的数学分支的借用物。不过，这是可以发生的，或许，甚至是一定会发生的，假如这个方法的运用会达到遍地开花的程度的话。指出这一点是有趣的：对对策论的初步探讨归功于当代一位真正的数学家和才智渊博的人物——约·冯·诺意曼①。

对策论按其精神倒很象引力论。二者都试图按照抽象的模型来研究广泛的一类现象。无论是哪一个理论都不企望把在任何一种情势中所能够遇到的一切复杂现象全部用作模型试验。其中一个研究的是有生命的东西的各种行动，而且只限于这类涉及某些本能行动的方面。这样，引力论对于处于12000米高空，而没有飞机、降落伞或任何其它设备的飞行员的一般位移问题能够给予极佳的答案。而对策论则从另一方面看，它更感兴趣的是当飞行员陷入如此境况时，他所采用的策略以及可能的策略的最适宜性问题。换言之，它表现的方面是采取解决办法和自由支配力。

如果不触及这二种理论（且不谈它们的社会意义）关于比较功用和价值（在一般意义上说）的问题，同引力论的这个比较就将是不充分的。一种理论已经完全成熟，并且作为极有效的接近实际的近似法而牢固地站稳了脚跟，可是另一

① 约·冯·诺意曼关于对策论的第一篇论文发表于1928年，但是第一次详细的理论阐述是在1944年。（见约·冯·诺意曼和奥斯卡·摩根司坦合著《博奕论与经济行为》，普林斯敦大学出版社。）这篇论文研究问题的性质当时得到某些评论家，如A·H·柯柏连德的好评。他写道：“后人将把此书看作是二十世纪前半叶最重要的科学成果之一。”（见《美国数学协会通报》1945年51卷，498—504页。）

种理论只是一个健康的儿童，他可能被鼠疫夺走，或者，他也可能长大，并且占一个重要的位置。然而，他今天所能给予人的很少。现在他象所有的儿童一样，稍稍爱吵吵嚷嚷，这当然是完全合情合理的。

在让你们尝试了一下在研究理论时可能碰到的数学的苦味以后，我们赶快请你们确信，我们的叙述将保持在入门读本，即提供练习阅读的初级教科书的水平上。我们明确地想象你们的数学知识不超出普遍算术的范围。假使不是这样的话，那么出于仁慈之心，早就应该劝你们将这本书合上了。

有关方法的若干评语

有时候大家说，假如在被研究的现象中有人参与在内，那么对于现象的理论分析就会复杂化。而我们在这些问题上相对的落后性，看来正成了这种见解的确证。今天在这个方面取得的不大的成果正逐渐丧失在极强烈的反对和认为这种方法过于繁难的断言之中。力求获得简单的理论（“简单的理论”所指的是若干原理和规则在数量观念上的多多少少的改变）的这项工作，我们正有赖于爱好者们，通常是物理学家们。从事研究人及其活动的职业科学家时常将这样一些爱好者看作早熟的孩童：这些人由于不了解人及其行为的真正复杂性，而睁着天真的眼睛想象他们的玩具剑能够劈碎活龙，就象打坏假龙一样。因为研究对策论的学者显而易见正属于这样的孩童之列，所以你们无疑预感到我们这会儿想必定会提出某些损及职业家们的痛快淋漓的批评意见，要不然的话，我们刚才就不会提出这个问题了。假如你们真是这么想的，那就证明生活中的一切简单到何等程度，而且可以赋予你们以前途无量的人性研究家的名誉。

对一个研究对策论的学者来讲，不知道有人参与的各种冲突情势的真正复杂性，并不一定是动力，这是因为如果他的知识不是如此不完备的话，他本来几乎无疑地会试图进行抽象议论。相反地，我们确信：他的信心，也许甚至是无谋之勇，是由于他对非动物界的复杂问题的了解早就远远超出了他的方法和他本身。如果既要求通过显微镜观察，而同时又要求保全广阔的视野，他是无法着手研究这些情势的，因为（这样一来）一切都消失在极多的细节及其组合的复杂之中。不过，从他获得某些成果的时候起，他就希望笨拙和复杂不致完全败坏他方法的名声。

他同时也清楚地了解，他的成果并不包罗万象，也非偶然，而且他的知识比较那些无知的新手所以为的要不完全；当然，那些以为了解动物界比较非动物界要困难的多（因为非动物界已经被认识得“极好”了）的人就属于这一无知者的范畴。须知，现代物理学家对于某些基本粒子还存在着最含糊不清的概念。（虽然这样并不妨碍他们成功出造出原子弹。）他们心爱的粒子、电子笼罩着秘密，他们甚至不能回答出如此基本的问题：眼下这一瞬息间，它在哪儿，同时它又是往何处运动着；更坏的是，他们已经确信，这样的问题是永远也没有精确答

案的。数学家们也有自己的弱点。例如，经过几个世纪的研究工作之后，他们仍然弄不明白这么个问题：为了画出一张地图，同时要使相邻的几个国家不致于涂上同一色彩，至少需要几种颜色。要讲一句公道话：他们猜测到这个数字是四，然而无法证明这一点①。

在近百年内，物理学往自己的箭筒里补充了一支新箭，即数理统计学，这只新箭至今只是战斗中的辅助武器。现在，他们已开始为它寻找更重要的用场，同时已经有迹象表明，将来作为研究生物界的方法，它的作用还会增加。对策论与数理统计学有很多接触点。它的实力的最早证据和它广泛应用的标志是它在计算普鲁士军队中由于被马踢而造成死亡的事故数目的全年分布情况时的成功②。假如你们要提出抗议，说马的行为比较人的行为容易预测，那我们可以悄悄地告诉你们，这个方法在这方面同样适用于由于普鲁

① “四色地图”猜测，已于1976年由美国伊利诺斯大学数学教授 Kenneh Appel和Wolfgang Haken利用高速电子计算机证明是正确的。——汉译者注。

②这个资料汇集了十个军团二十年间（1875年—1894年）的情况。每年在每个军团中发生造成死亡的事故数量如下

造成死亡的事故数目	在该期内发生如第一栏所示事故的月数	
	观测数	计算数
0	109	109
1	65	66
2	22	20
3	3	4
4	1	1

计算值的获得是根据唯一的假设，即平均每20个月发生一件造成死亡的事故，而且根据统计学理论特别适用稀罕事件的特点。——作者原注。

士人狠命殴打而在马匹中造成的死亡事故的数目分布情况。全部保险事业就是将统计理论运用于人的活动的若干方面的范例。保险公司的报告对照表乃是统计学理论成效的雄辩的证据。认为人的活动完全无法预测，这是不正确的。

我们能够期望由对策论中得到什么呢？毫无疑问，对全面概括任何军事、经济或社会情势来说，它是太简单了。另一方面，它又足以扼要阐明对许多有趣的冲突情势的一系列批判性看法。

目前，必须要做几件重要事情。首先，继续发展理论，以便能够解决更困难、更多样化的复杂问题；这个任务要由科学家们解决。第二，发现那些现有理论行之有效的情势。本书的宗旨之一，就是扩大这样一些人的数目，使他们具备有关对策论若干要素的概念，并能将它推广应用于那些在他们的工作中经常遇到的各种复杂问题。（那些坚韧不拔的读者，将能够自己表述和解答简单的问题。）另一种任务是收集人们相互关系方面的资料，以便进一步完善理论基础。

局 中 人

我们终于要言归正传了。我们将从研究玩扑克着手，而且把它继续到恰好得以引进我们将在此书中应用的某些概念和术语的程度。你和另外四个人仍正坐在桌旁，拿着一副纸牌、若干数目的钱或是其它值钱的东西，并且早就达成了对能预见到的一切可能情势的规约。这些规约规定了应该如何分牌，谁在什么时候可以出牌，在揭牌时如何评价各种组合，以及应该怎样处置庄家面前的赌本。

在这种情势中，显而易见的一点是有五个人参加打牌。然而，这里比一致公认的见解更为无疑的情况也许是其中两个赌者可以在开始前约定好平分输赢而结成联盟。假如他们是这样做了，那么就有理由推测他们将按情况所允许的程度，为着共同的利益而赌牌。这样一来，假如联盟中的一个参加者看到他的伙伴在揭牌时有获胜的好机会，那么他必定采取一切办法帮助伙伴。如果只有三个未声明不进牌的赌者，他甚至可以喊“帕司”（声明不进牌），以宣告由那个不在他们联盟之列的赌者承担困难。假使他晓得别人无法赢他手里的牌的话，他还可以提高赌注，以增加庄家面前的赌本。简单地说来，这个结盟的成员将如同一个有两个脑袋的人一样采取行动。

在有两个赌者结盟的情形下，把赌博的局中人看作是四个，而不是五个，显然是适宜的。这样，我们可以得出一个结论：有意义的是计算具有对立利害关系的集团的数目，而不是坐在桌旁的人数。依照这个原则，桥牌戏① 就应该看作是只有两个局中人的对策，因为其中只存在两个利益集团。

① 或是多米诺骨牌戏。——俄译者注。

可以看出，“局中人”这个字眼在我们所应用的方面来说，它既可以用作表示法人和组织，也可表示普通参加者。

此外，你还可以把打扑克看成是两个局中人的对策，你是其中一个局中人，而其余四个对手则是第二个局中人。假如他们对此看法与你不同，那么他们并不会获得任何好处，而你也决不会因你为他们设想的联盟而遭受任何损失。这就象他们似乎是结成具有微弱的内部联系的同盟或是似乎结成具有某种使自身失效的毛病的同盟一样。

局中人的数目，或者更确切些说，对策现象中具有共同利害关系的集团的数目，是对策论中一个基本的性质。情势的整个性质和研究的方法全依此数目为转移。有三种意义必须区别的局中人数目：一个、两个和多于两个。

只有一个局中人的对策现象的实例是摆牌阵——这是一种供消遣的游戏，在场的只有你这个唯一的当事人。倘若你甚至要按一张牌一美元的价格付钱给某个人，而这个人或许也想按每张死牌五美元的代价偿还你，那么在这种情况下，什么都没改变：必须考虑的仅仅是偶然事件，而不是一个有理智的对手的手法。从对策论观点看，只有一个局中人的对策现象是没有意思的。它的解法至少在原理上是非常明白的：你不过是选择一种能带给自己最大利益的最佳行动方案，并且照此方案行动。假使具有偶然事件，那你可以选择能带来平均最大利益的那个方案，并且照此方案行动。你或许会抱怨说，我们疏忽了大量实际困难，你这可是说对了。

不过，只有一个局中人的对策现象（包括牌阵）可以看作是两人对策的特殊形式——其中你是一个局中人，而自然则是第二个。这样的观点也许是极为有益的；如果甚至连你也不相信，自然会是一个尽找机会以巧计来胜过你的敌对者

的话。比如说，你在选择能保障自己获得最大的平均收入的方案时，你可能对自然的“习惯”了解得不够。或者可能发生这种情况：尽管你知道自然所能采用的行动方案，但却不知道它使用每个方案的频率，而在这种场合，对策论却正有所言：它如同我们将会在后面看到的那样，将引导你获得最经济、最谨慎的对策。

较为有趣味的是有两个真正局中人的对策现象——两人对策。这种对策在实际生活中时常可以遇到，同时不论是在原则上或是实践中，我们往往都有能力把它解出来。它乃是一种寻常的冲突情势。你必须假定，你面对一个有理智的而且想取胜的对手。假如你选择了某个对你显得有利的行动方案，那他可能看透你的计划，设置圈套，并从你个别的选择中营利。许多严格来说并非只有两个参与者的对策情势，也可以看作这一类对策。有五个参与者的扑克游戏便可以作为一个实例；在这种对策中，你可以认为牌桌旁所有人的全部利害关系都归结于两个“局中人”——你自己和其余所有的人。对策论现今所研讨的大部分内容就属于两人对策。

如果不同局中人（即利害一致的集团）的数目超过两个，那就必须注意性质上新的现象。在对策过程中，局中人的组成按照暂时结盟的建立和破坏而发生变化，或者是某些局中人可能在某个一定的阶段中组成固定的结盟，假使这样对他们有利的话，——这些都将是带原则性的新内容。这在玩扑克中也是能够发生的，并且，这样一来也破坏了我们认

为扑克游戏是两人对策的概念。比如说，你可以同其余的参加者不露声色地，然而却是认真地联合起来对付走运的一个局中人。你的担忧的原因可能是他会抛弃你而捞走全部金钱，或是你希望让那个不大走运的人也能取胜。我们在多于两个局中人的对策方面的知识比在两人对策方面要较不完备。这个问题是极为复杂的，并且实质上超出了本书的范围。

支　　付

我们已经指出，对策现象中局中人（应理解为利害一致的一定集团）的数目是对策的分类和研究的重要标准之一。支付则是另一个标准。对策的最终结果如何？譬如说，在玩一轮扑克牌的末尾，发生了些什么呢？在这种场合，通常发生着钱的交易。假定说，局中人是两个，你（蓝方）和我们（红方），那么如果你赢得了10美元，我们同时也就输掉了10美元。换句话说，

蓝方的所得＝红方的所失，

或者，也就是

蓝方的所得－红方的所失＝0。

如果我们约定，所赢得的（收入）为正数，而所损失（付出）的为负数，我们还可以换一种方法记为

蓝方的支付＋红方的支付＝10美元－10美元＝0。

各方的支付总数并非永远十分准确地都是等于零。譬如说，如果一个局中人赢光了庄上的钱，那么他必须出10％的赢钱买酒喝，或者是贿赂在角落站岗的警察之类的其它费用。那么在这种情况下，各方支付的总数就不等于零；事实上

蓝方的支付＋红方的支付

＝9美元－10美元＝－1美元。

上面援引的两个特例可以说明各种对策之间的主要区别：如果把收入看作正支付，把支出看作负支付，那么全体局中人的支付总和是否等于零，是极为重要的。假如这个总和等于零，那么这个对策就称为零和对策。假如它不等于零，则称为（数学家们有时缺乏想象力）非零和对策。这种区别的意义是显而易见的。在零和对策中，我们遇到的是一个良好、明确、封闭的系统；两个局中人及其得失都关闭在一个房间里。要把这种对策研究明白，并且解决它，当然需要一定的努力。非零和对策包括着零和对策的全部困难并且加上那些由于必须考虑新的因素而引起的额外麻烦。假使补充一个虚构的局中人——又是自然，或者譬如是警察，那就可以注意到这些新的因素。于是，我们看到：

蓝方的支付＝9美元

红方的支付＝－10美元

警察的支付＝1美元

因此，现在

蓝方支付＋红方支付＋警方支付

＝9美元－10美元＋1美元＝0。

这在某种意义上就是一种三人零和对策，并且这第三个局中人的作用使人想到悬挂到你脖颈上的那块石块的作用。不

过，我们将会记得三人对策不会引起我们如同对两人对策那样的好感，这是由于其中存在着同结盟的可能性有关的困难。而这些困难在零和对策中是没有的，尤其是，假如后者又是两人对策的话。

诸如扑克、桥牌、象棋之类的沙龙游戏一般都是零和对策。有许多其它的冲突情势同样能看作是零和对策。对策论迄今的大部分成就属于这一类型的对策现象。虽然在非零和对策方面过去进行过，而且现在仍进行着一些研究工作，然而，这种对策超出了本书的范围。在两人对策中，名义上相同的支付，对于各个局中人具有不同的意义。这种对策是具有特殊重要性的伤脑筋情况。类似的情势甚至在沙龙游戏中也是时常遇得到的。

策　　略

“策略”这个词也如同“局中人”一样，在对策论中具有若干不同于一般的意义。在日常生活中，这个词是表示一种巧妙、机智的方法（计划），然而，在对策论中，它是表示任何一个完整的行动方案。策略是不受对手或自然的行动干扰的完整的某个方案。因此，对手或自然可能采取的一切行动连同你的一组可能的活动就都是策略所描述的一个部份。

于是，对策论中的策略便在两个重要的方面有别于它的普通含义：它必须是绝对完整的，然而它也许是极端不利的，因为对其唯一的要求只是充分的完整而已。这样，打扑克牌的全部策略都必须预见到这种情况，即你手头可能出现黑桃的一副王牌①，而某些策略将要求你立即不进牌。后者并非有利的策略，但是，它归根结蒂依然是策略，就是一个

① 一副王牌——一色的爱司、国王、皇后、杰克和十点。——俄译者注。

局中人手边有十三张黑桃牌，宣布用"缺王牌七"桥牌（斗法）。在经过充分分析的对策中，假如不是实际上，那就是在原则上，我们能够预见到全部可能性，因此，我们就能够列举出全部可能的策略。

现在我们还将提出一个可以依据它将对策分类的标准，即每个局中人支配的策略的数目。这就是说，如果蓝方有三个策略，而红方有五个，那么这个对策就称为3 × 5对策。

当我们说到局中人的数目时，便要特别注意某些数目——一、二和大于二。可以用类似的方法区分策略数目的评判意义。区别两个种类是很重要的。第一类的对策中，拥有最大数目策略的局中人的策略总数是有穷数；这表明他能够点数它，而且在某段时间范围内能够数尽。第二类的对策中，至少一个局中人拥有无穷多的策略，或者说（如果"无穷多"这词使你害怕的话）在这个对策中，至少一个局中人拥有的策略数超出了你所能说出的任何一个确定的数目（顺便说一下，这恰正是数学家理解的所谓"无穷大"数）。

虽然，无限对策（即后一类对策）包含有许多饶有兴趣的和有效的用途，但是这种对策的理论是艰深难懂的。这里指的"困难"是至少存在着若干数学家们现在还不知道怎样解决的难题。此外，它还意味着我们不知道在本书简单教育的界限内该怎样对你讲述这种对策。要分析类似的对策需要运用微分学水平的数学，甚至还要高些、更高些。因此，我们这里决定只局限于有限对策。

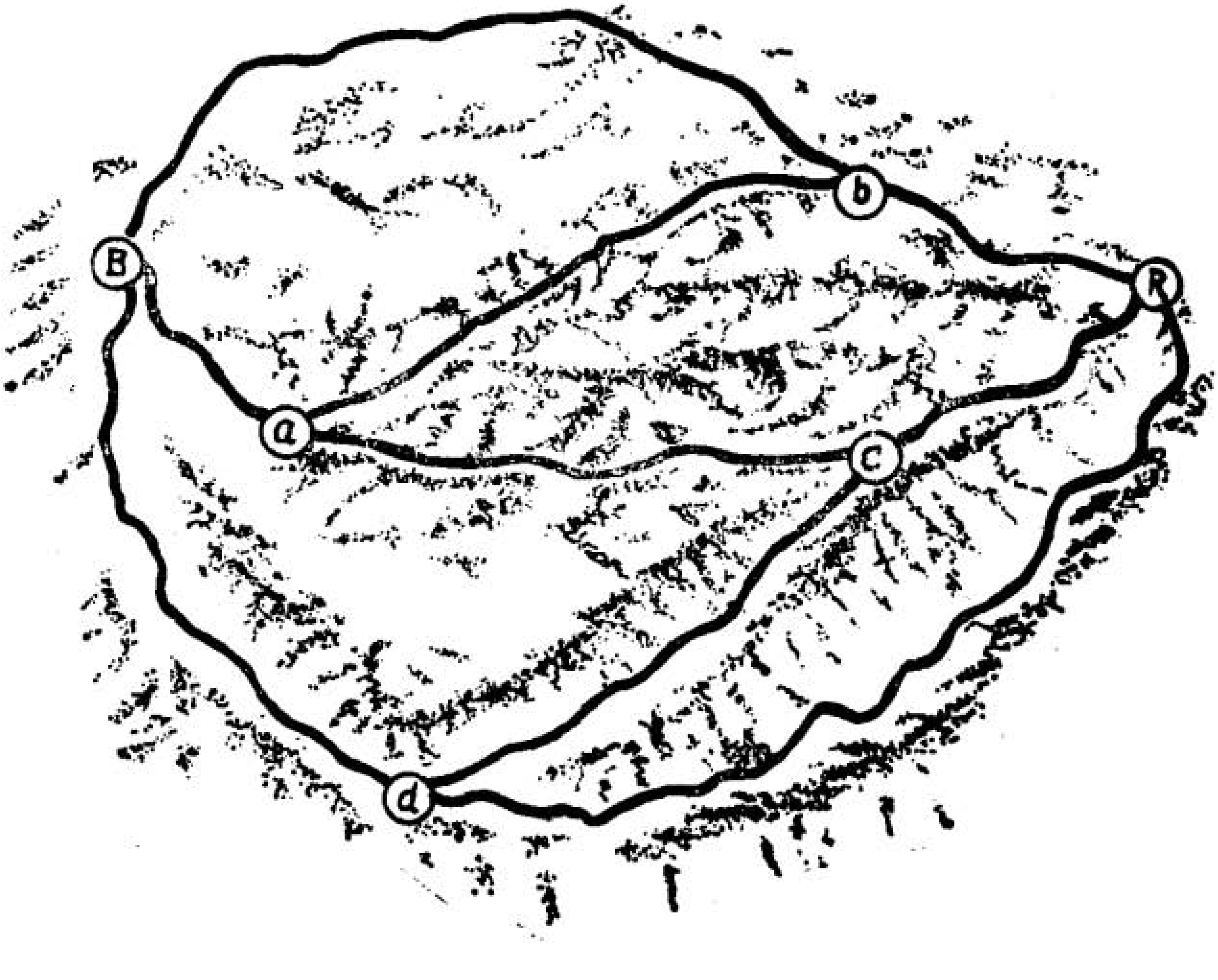
在以下各章里，我们认为区别有限对策的三种情况（即区别对策中拥有最少数目策略的一个局中人恰正有两种、三种和多于三种策略时的对策现象）是一种妥当的方法。除此之外，为了减轻疲累以求平安的理由，我们只好对拥有十种

以上策略的对策另行研究了。

支付矩阵表

现在，我们已经有能力以对策论方法所要求的分析形式来完成对策现象（即冲突情势）的描述了。我们要提醒你注意我们前面所提的各种限制的规定，以便将更进一步的叙述引向本书中所研究的那一类对策现象。因此，我们的叙述首先是关于有限零和两人对策的。

局中人是蓝者和红者。每个局中人有若干我们认为是已知的策略，我们将其编上序号以便辨认。这些策略将称为“蓝者－1”，“蓝者－2”等等，在个别场合直至“蓝者－9”。红方的策略将称作，譬如，“红者－1”直至“红者－5”。这样的对策，我们称之为9×5对策。为了证明



这样的9×5对策是存在的，现在让我们来看看下面旅途地图上可行的对策实例。

对策的规则要求蓝者按图示的路线系统由B点向R点转移，既不能向B点后退，也不能在同一路段上经过两次。对红者来说，又有另外的规则：他必须从R点转移到B点，永远是往西移动。也许，蓝者不希望同红者遭遇，而且在自己的行动中受限制较少些。你可以很容易地证明出，对蓝者来说，有九条行进路线，红者则有五条①。

规则同样也必须包括可以作为判定每一局对策终结时的结果的资料。譬如说，假使蓝者采用策略蓝者－7，而红者采用策略红者－3时，支付值如何呢？这样的对子共有9×5＝45个，因而也就有45个可能的支付值，它们全部都是我们必须知道的。不论这些值如何，我们都完全能将此资料以下页的簿记形式记录下来。

类似这样在每个方格内指示出支付的一览表，称为**支付矩阵（表）**。我们约定：矩阵表方格中的正数表示蓝者的所得（赢），那末，红者的所失（输）恰正相反。因此，如果在支付矩阵表上，如同我们图表上所表示的，有数字3和－8，那就是说，假使蓝者采用“蓝者－6”策略，而同时红者采用“红者－4”策略的话，那么蓝者就赢得3个单位；可是，假如采用“蓝者－2”策略来对付策略“红者－2”，那么红者就可赢得8个单位。

在把原有的问题整理成为这种形式之后，便可以采用依

---

① 为着使你在研究对策论的开头阶段不致陷于混乱状态，我们把这些行进路线列举出来。蓝者始自B点，止于R点，可以按以下路线转移：

b，bac，bacd，ab，ac，acd，dcab，dc，d

红者则可按以下路线移动：

b，ba，ca，cd，d ——作者原注。

红者

		1	2	3	4	5
	1					
	2		-8			
	3					
	4					
蓝者	5					
	6				3	
	7					
	8					
	9					

据对策论的分析方法，这是因为这整个极为重要的资料描述着沿矩阵表边上列举出的各种策略以及分布在表格中的各种支付值（矩阵的元素）。这正是对策论中所运用的冲突模型，同时随之而来的分析的正确性完全取决于这个表达形式——策略组和支付矩阵表——与实际情况相符合的程度。

保密的假设

或许，现在应该更详细地阐明我们的最后一个论点。在某一个时间内，我们的注意力仅限于两个复杂的研究对象。其中第一个对象是蓝者和红者参加的真实的冲突情势。它包

括着实际有效的种种定律、法则和禁令——即同对策实际情况有关系的一切。第二个对象也是实在的，但却简单得多：因为这是些我们写下来的法则，我们编上序号并登记在纸上的策略，以及我们画成的支付矩阵（表）。在这样两个对象之间有一种联系，我们希望这是极重要的联系。第二个对象是纸面上的标记，是第一个对象的抽象。在运用对策论方法的同时，我们可以发现第二个对象的某些不明显的特性，而这些特性对第一个对象——真正的对策现象来说，能够表现某种价值。不过，一切都依赖于抽象的正确性。

本书的主题即是研究对策论如何运用第二个对象——抽象的模型。这时发生的困难和问题，原则上都是技术的，而不是理论的。这是些运用复杂的数学问题时的机敏办法的问题，或者说，是些用什么方法来避免令人厌倦的劳动的问题；一般地说，这是高级的体操。在转入较为愉快的消遣之前，我们必须想到：只有我们越过许多实际的困难，即越过表述问题的困难之后，一切才能变得简单和容易。

当我们试图把各种支付值填入矩阵表的方格时，便时常遇到一个这类的困难（它是对策论的临界点），这是因为事情涉及它运用于实际生活的冲突情势。虽然往后我们会发现存在着要求并不如此严格的情况，但是在一般情况下，我们应该假设，支付原则上也许是已用数值测定，并假设我们知道它是如何测定的，而且测定得足够精确。在所有方格里的测定单位必须是同一的，同时这些单位必须具有单纯的量度。换言之，我们不准备在一个方格同美元有关系，在另一个方格同铀的克重有关系，同时，在第三个方格又同人的生命有关系。当然，如果我们不是偶然得知这些对象的“交换行情”的话，那么我们也就不可能避免度量单位的不统一

性。假如各个方格中的支付含有若干表现不同对象的数：若干美元、若干数量的铀，以及若干生命，除特殊情况之外，我们仍然将陷于困境。这个困难就连在普通的对策现象中，也有可能发生。譬如，让我们看一看两个行家之间的对策现象。在这个场合，款额和声望都是赌注。倘若我们没有款额和声望之间的"交换行情"，那么，我们的分析就将面临困难。鉴于实际问题的缘故，有关问题足够精确的提法，对有可能充分列举各局中人的可能行为来说，是另一个带原则性的困难问题。同时，应该避免从问题的条件中排除其由实际环境受到的那些重要的影响。

另一些危险今后将偶尔出现，只要我们的推论一旦撞上一块不管什么样的暗礁的话。不过，也不要矫枉过正，因为对有效的模型来说，它并非务必要是实际生活情势的绝对精确的模塑品。我们将会看到，在这一方面，在好些情况下，将有颇大的自由。

标　　准

在建立数学模型（不同于木料的）时，常常有的困难可谓选择标准的困难。能够用来判断对策的最好结局的标准是什么呢？或者说，借助它想必能够引出这样的判断的标准是什么？

为着举例说明在最平常的情况下可能有的标准是如何之多，让我们想象出一个需要购买五美元肉的主妇。她应当买些什么样的肉呢？如果她的标准仅是数量，那她就应当买最便宜的那种肉，同时以公斤计量"支付"。假使她感兴趣的是多样性，她应当由最便宜的种类开始，买若干种最低限度的数量，同时用她所购买的肉类数目测定"支付"。最后，

她可能注意的是蛋白质、脂肪或卡（路里）的含量。她可能希望满足其它各种条件或是遵守某些另加上的诸如味道、禁忌的限制的规定，等等。还有可能，她关心的是在预备食物时如何最省力，在这种情形下，她可能说："我要五美元的烤肉。请您来我们这儿时，就把它给送来。"

总的来说，各种标准的复杂问题是由两个问题组成的：测定什么，以及根据这些测定怎样行动。在第一个问题方面，对策论是无可奉告的，但是在根据所得到的测定量选择行动方案方面，它却可以作出明确的建议。

对策论断言，假如有理智的人们采纳这个支付矩阵表的话，那么对于他们如何行动的问题就会有明确的答案。人们应该遵循的这个确定的行动方式的概念与建立在法令和伦理

道德基础上的责任无关。这个概念跟独特的数学模型很有关系，或是说至少跟谨慎原则有关系。这个原则断言，局中人的主要目标是面对一个在追求对立目标的机智对手时，能够有把握地获得尽可能大的收入。我们的合理行为模型正是如此。如同一切模型那样，每次新穿的靴子都应当试量一下，以证实它确是非常合脚的。不过，大家也都很清楚，譬如说，由战时实际经验中知道，穿着蹩脚的靴子也能够走很远。

让我们来研究一下，将这个模型应用于如同你所记得的封闭系统（其间的存款只是由一个局中人转给另一个）式的零和对策，会产生什么结果。如果我们在某个时期内为了使叙述简单化而假设矩阵表上的全部支付都是正数，那也许就谁都不会受委屈了（除了红者以外）。这就是说，各个局中人所可用的全部可能的策略，现在将只影响到一点，即一局对策结束时，红者要支付多么钱给蓝者。这对于红者来说，明显地是欺诈，但是，为着共同的利益，我们不得不让他们吃点亏。

从对策论的观点来说，现在蓝者希望采取的行动使得他所能够得到的最小收入尽可能地大些。这符合于可靠性的要求。相反地，红者的希望是不论蓝者的行动如何，要使自己必须付给蓝者的最大金额尽可能地小些。这样的哲学（如果各局中人能够遵循它），对于确定他们策略的选择是足够的了。倘若蓝者拒绝这个选择，那么，他就有减少原先可以得到的收入的危险。而如果红者不依照这个选择，那么，他就可能要增加原先的付出。

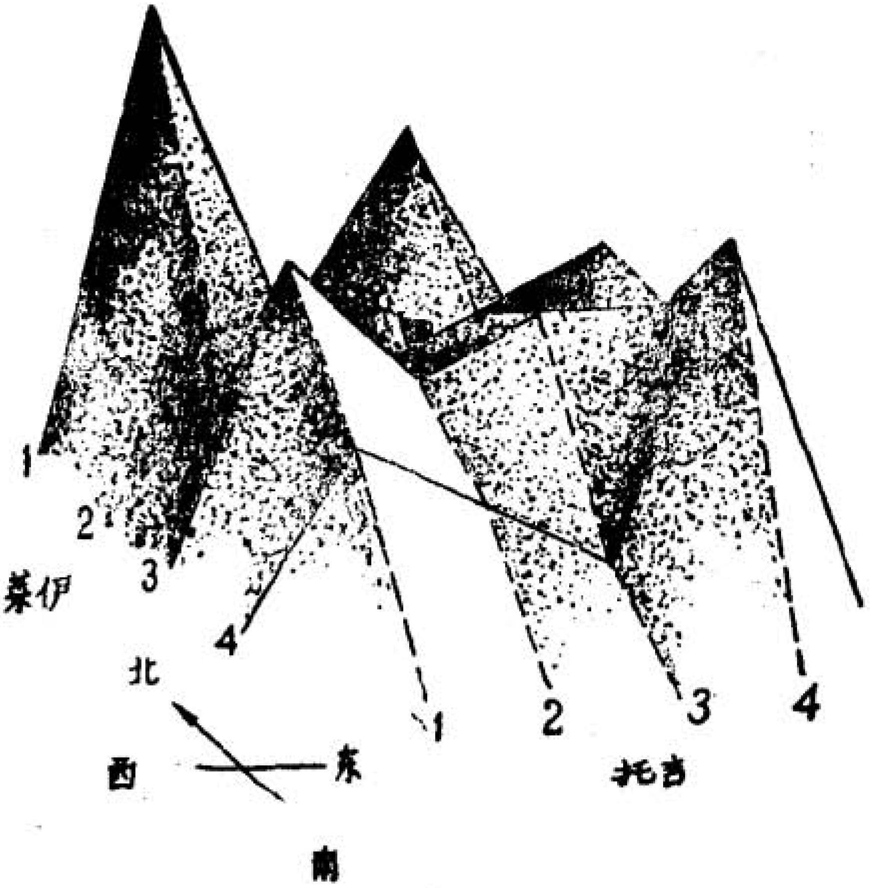
上述推论就是对策论的中心思想。在任何一种两人对策中都可以找得到符合上述研究过的标准的行动方案。不过，在象买肉的主妇所发生的这种情况中，这远不是唯一可能的

标准。譬如，你还可能想出许多别的标准，从而把不同程度的愚昧无知归咎于你的对手。因为对策论并不把这些美妙的品质说成是对手的，它是一种保守的（谨慎的）理论。

请你注意蓝者和红者的目标表面上(似是而非)的差别：蓝者的目标说的是收入，而红者的目标说的却是支出。这种差别不是真实的，因为两个局中人依照的是完全一样的推论。这种表面上的差别是我们彼此约定好在支付矩阵表上正数和负数具有什么含义的结果。接受这样一个约定条件：即蓝者经常关心的是极大值，而红者经常关心的却是极小值，将会减少我们某些技术上的困难；但是，让我们别因为这种记忆法上的规定而断定蓝者和红者的地位没有对称性。

例一 旅行者

某个物理模型可以帮助我们掌握这些思想。当所有的支



付全是正数时，我们就可以将它看作是山地间各个独立点的高度。这样一来，蓝者和红者的不同策略，也就将与这些点的地理经纬度的不同值相符合。

为了使在对策中有登场人物和论证，我们假设，有一对夫妇（我们姑且称之为莱伊和托吉，因为具体性总是有帮助的）想去进行一次旅游，莱伊乐于爬高峰，可是托吉却比较喜欢低地。与他们有利害关系的区域被四面八方的道路网成十字形地贯穿着。旅行者们约定好要在一个交叉路口布置野营。接着，他们又商议说，莱伊选择由东往西的道路，而托吉则取道由北往南，同时共同确定了交叉点。倘若现在对策论不能解救他们，他们则要绝望而死。

莱伊能达到的道路交叉点有以下高度（以千英尺为单位）：

莱伊	1	7	2	5	1
	2	2	2	3	4
	3	5	3	4	4
	4	3	2	1	6

作为一个只是希望由此得到尽可能大收获的聪明人，他自然地一定比较喜欢在高度为7、2、5、1上有交叉点的“莱伊-1”路线，因为只有这条路线上才有高达7千英尺的山峰。然而，他立即考虑到：这是不可实现的幻想。他不敢采纳这个方案，虽然这个方案对他预兆着许多好处，但是如果托吉在选择自己方案时表现出应有的技巧的话，它也许将导致失败。莱伊放弃了那种以为托吉会不加思索地行动的假

设，为着本人的利益，不得不特别注意从他的眼光来看是破坏了地形的那些低地和斜坡。这种考查终于致使他选择了“莱伊-3”路线，因为在这条路上的某地区，即在3千英尺高度上，有一块最诱人的低地。选择“莱伊-3”路线时，他可以担保，营地至少将布置在3千英尺的高度上。假如托吉稍微疏忽大意一些，营地或许会设得再高些。

不过，正如他所猜度的那样，他的妻子在这些事情上，是同他本人一样聪明的。她的旅程路线上遇到的临界高度列举在下面的一览表内：

托吉

1	2	3	4
7	2	5	1
2	2	3	4
5	3	4	4
3	2	1	6

她研究过这一览表之后，立即了解到：她不值得把时间浪费在对“托吉-3”和“托吉-4”路线的幻想上，虽然在这些旅程上有她所最喜爱的深深的山谷。作为一个现实主义者，她

考查那些在她旅途上所遇到的山峰，决定了这么一条路上座落着数座最低的山峰的路线。这就终于致使她选了路线“托吉-2”，对她来说，所可能发生的最坏情况就是在3千英尺的高度上宿营。

这时，我们发现发生了某种类似巧合的情况。莱伊选择的策略（“莱伊-3”），担保他将在3千英尺或多些高度上设营，而托吉选择的策略（“托吉-2”）保证她能在3千英尺或少些的高度上休息。换言之，尽管面前有聪明的对手，然而每一个局中人都可以在3千英尺的高度上得到一个歇脚的地方。假使他的对手更为疏忽大意一些的话，他便能够得到较好的结果。

假如象我们这种情况中发生的这样，蓝者和红者有保证的极小和极大的支付丝毫不差地相等，那么，就说对策具有鞍点，同时，局中人应当采用与这个点相符合的那些策略。如果任一局中人偏离鞍点规定的策略，他就必定招致不必要的损失。如果两个局中人都脱离这种策略，则情势会变得完全不肯定，同时任何一个局中人都将成为它的牺牲品。

请你注意这一点：即鞍点的存在决定着在此种情况下没有必要保密。无论是莱伊，或者托吉都能够公开宣布自己的选择（如果他是如同他应该做的那样），而且对手也不能够利用这种情报（信息）达到迫使另一个局中人选择比3千英尺高度更差的地方做宿营地的目的。

我们已经指出，就对策论方面来说，鞍点的存在使人想起某种类似不谋而合的东西。鞍点相当于群山之间的山隘，而几乎每一个复杂的山系都具有许许多多的山隘。但是，从对策论方面来说，若要认为该山隘是鞍点，那它还必须具备某些特点。首先，座落有山隘（即顶点）的道路走向必须是

由北往南，即必须是在那个希望支付尽可能小些的局中人的支配之下。第二，在山隘的南北不应有更高的点。第三，在山隘的东西不应该有更低的点。这些条件是极为必要的，因为山隘——这是局限于一地的地形特点，这些条件还需要若干在规定之外的特性，以便使这个点具有普遍性，同时能成为四周围中较好者。

虽然往后我们将一直研讨具有鞍点的对策现象，但总的来说，这类对策并不经常遇得到。在象我们刚才所分析的这种4×4对策中，在由随机数字编成的矩阵表里大约有十分之一的可能性有鞍点。

在我们这种情况下，矩阵表里的许多点之一仅仅不大的改变就能够消除鞍点。比如说，假如把“托吉-2”和“莱伊-4”路线的交叉点的高度从2千英尺改变为6千英尺，则对策的性质将完全不同。在这个对策中，我们有关选择策略的基本推论已经成为站不住脚的东西。如果莱伊仍同原先一样推断，他将会重新选择“莱伊-3”路线，因为这能担保他在3千英尺或更高些的高度上设营。但是托吉仿效原来的推断，这一次将不得不选择“托吉-3”路线，因为这能担保她

		托吉 1	托吉 2	托吉 3	托吉 4
莱伊	1	7	2	5	1
莱伊	2	2	2	3	4
莱伊	3	5	3	4	4
莱伊	4	3	6	1	6

这一次在5千英尺或更低些的高度上设营。

这样，在3千英尺同5千英尺之间就形成了间断，而在这一间断里情势成为不受控制的了。你的直觉能够暗示给你：必定存在着一种（进行）对策的方法，能够将得到的间断连续起来。这种方法确实是有的，不过我们的研究必须从最简单的情势开始。顺便指出，好的对策的进程需要采取比较其在有鞍点的对策中更加严格的保密。其中之一是，各个局中人必须同时公布自己选择的策略或是秘而不宣。至于他们应当在这些密封的信套里写些什么，现在仍不明白。

第二章　两种策略的对策

2×2对策

引　言

我们应当尽量委婉些来阐述对策解法的技术方面。看来2×2对策是完全适合于这个目的的。

我们会记起这样一个要求：对策要归结为一份支付矩阵表，即长方形（或许可能是正方形）的数字一览表，而这份表上的各行、列都与各个局中人所能采用的各种策略相符合。反过来，任一个长方形的数字一览表显然也完全可以看成某一个对策的支付矩阵表。我们甚至可以设想出一个具有这样的支付矩阵表的对策来。因此，有时我们将局限于研究各个独立的矩阵（表）的特点以及这些特点的结果，而不必关心那些它们所代表的真实的对策现象。由于除去了对策的内容，这样一来，我们便能不受干扰地研究各种技术问题。

我们将一直寻求对策的解。这就是说，我们将试图查明各局中人应当采用怎样的策略或策略组，并且在那种需要采用一种以上的策略的情况下，我们将注意到按什么次序采用这些策略的问题，因为实际上在每种场合能够使用的都仅只是一种策略而已。

我们所将要研究的那些对策之中的任何一个都具备解

法，即总有一种良好的对策方案，同时只要这个工作不是过分繁难的话，我们是能够寻找到它的。

我们将从最简单的支付矩阵表开始，而后逐渐过渡到较为复杂的内容。在这一章，先把注意力放在2×2对策上，但是，我们并不仅仅限定于这种对策。我们将会遇到2×3、2×4对策，而且我们实际上将遇到的是其中一个局中人仅有两种策略的所有对策现象。

让我们约定好以下一点：我们将把蓝者的策略编号列举在支付矩阵表的左边，而红者的策略则编列在上面①。全部的支付都将归结为蓝者的，即矩阵表方格中的正数表示红者给蓝者的支付，而负数则表示蓝者给红者的支付。读者最好是把自己看作是蓝者。这样，正数将意味着他收入，而负数则是他付出。

随机偏差

我们将从很简单的情况开始：

		红者 1	红者 2
蓝者	1	0	0
	2	0	0

回想一下这个统计表的意义：矩阵表左边的整数只是代表蓝者策略的编号，即在这场对策中对蓝者来说所具备的两个行动方案。矩阵表上面的数字也正是表示红者的第一、第二个

①这就是说，蓝者的策略是矩阵的（横）行，而红者的策略则是矩阵的（纵）列。——俄译者注。

策略。方格中的数字则告诉我们，如果选择对应的各种策略，与之有关的支付情况。

看来，我们的对策也许是世间最枯燥无味的游戏。不过，这至少是诚实的游戏。各个局中人完全无力影响到结果，因为在任何一个场合，不论他们怎么做，支付均必等于零。但是，真是这样吗？

纸是包不住火的：当我们在第一章记述支付矩阵是怎样编写成的时候，我们设想了个简单化（过程），对于这一点，现在你在研究2×2对策时已经看得出来。

在矩阵中列出了蓝者和红者的所有策略，即无论是蓝者或是红者都可以自由选择的全部可能的行动方案。这份统计表是详尽、完整的，也就是所有可能的行动序列，聪明的或愚蠢的，都代表着对应的策略。但是否应由此得出结论说：在每一个矩阵表的方格里都只可以填上同一些数字呢？假如你乐意的话，随机现象——“自然的过程”的情况如何呢？显而易见，蓝者采用随便一种策略，同时红者采用另一种策略都不保证支付会是唯一的，即不论什么情况下都是一样的。譬如说，对策或许会是这样的：各局中人的策略只是规定他们之中谁能得到支付，但支付的大小却是由自然规定的，在这里自然为此利用了轮盘赌的轮子。

那么，在矩阵表方格中的数字“0”究竟表示什么呢？或是数字6，或是2，或是别的什么数呢？它可能是常数，这时在运用相应的一对策略的情况下，对策的可能结局是一种，而且仅只是一种。但是，如果对策是这样的，即在每个局中人规定好的策略条件下，支付可能是若干数字中的随便一个，那么记在矩阵表里的数字是支付的平均数值，其大小受偶然事件的支配。这是很重要的情况，为着充分弄清这一

点，我们将研究一个例子。

我们假设说，有一对策略造成了三种可能的结局：在一种情况下，蓝者收入8；在另一种情况下，蓝者收入24；而在第三种情况下，蓝者损失8，假使把只是数字8、24、-8的简单平均值8填写入支付矩阵表相应的方格，那是不正确的，因为自然可能感觉到对它们不够一视同仁，举例来说，如果选择抛掷硬币作为随机机械，同时把硬币的徽章（正面）落地算作+8（蓝者收入），背面落地算-8（蓝者的支出），把硬币的侧面落地算作+24，那么，由于拥有现代的薄硬币，因此可以认为出现最后一种情况是完全难于置信的，并且可以排除它，而硬币的正、反面落地的概率则可以看作是一样的。在这种场合，真实的平均数（值）可以由+8与-8相加并除以2而得到，即$\frac{8-8}{2}=0$，这才是应当填写进矩阵表的数值。假如所抛掷的硬币，其厚度大约有直径的三分之一，那么它正、反面的落地和侧面的竖置就将是等概率的，这样一来作为支付就应当填上$\frac{8+24-8}{3}=8$这个数字。总之，数字要按照有利于这些数字出现的情况（发生）的数量进行衡量。譬如，如果数字8、24和-8落地的有利情况彼此间的比例等于1∶3∶4的话，那么，对应的平均数（值）就将等于

$$\frac{1\times8+3\times24+4\times(-8)}{1+3+4}=\frac{8+72-32}{8}=6$$

我们这样求出的平均数，数学家们称之为“期望值”。显然，这样的用词需要特别的解释。我们不能期望，在运用该对策略的条件下，我们必定将得到在该情况下是6的支付。恰恰相反，这样的支付实际上在一局对策的结果中是永远也不会有的，但我们期望支付的平均数力求达到6。如果用下述方法加以推论，那么就能理解所期望的值的大小的含义：假使蓝者想运用该对策略同红者对策，那他就应当由红者得到预定等于6的公平报酬。如果所付出的是另一个数目，那么对策对于一个局中人来说将变得不诚实了，因为这样一来他将要付出的比收入的更多。

这些必不可少的插话扫清了往后的道路。现在让我们再回到这个矩阵表：

		红者 1	红者 2
蓝者	1	0	0
	2	0	0

现在，我们已经知道，在矩阵表方格的零的后边，可以隐藏着带有流动的收入和付出的偶然事件。我们举出这个例子是要说明对策论的一个弱点或是一个隐藏的限制。假设在右上方和左下方的方格里没有与之对应的偶然事件，于是每一对（对策）的相应支付便丝毫不差地都等于零。我们再假设左上方方格中的零是依据发生数字＋1和－1的同等概率的支付的平均数，而右下方方格中的零则是两个等概数＋1000和－1000的平均数。由于局中人的赌本有限，他完全有理由抛弃策略－2（这个策略能叫他一次全毁了），而宁肯采用策略－1。

这样，为了缩短对策现象中偶然事件影响的描述，我们所应用的期望值（即为大量对子的平均值），包含着缄默的假设，即局中人能够经受得住偶然事件的暂时变幻，而不回避它。

如果这种假设同事实不一致，那怎么办呢？大概，对策论的专家也未必会来给我们帮忙的。他将声明，所发生的困难只同我们自己有关而与他无关，同时，我们之所以倒霉仅仅是因为我们在决定可能的各种支付的大小时疏忽大意，而这完全不属于他的范围。既然我们认为彻底的破产，如同一般的付出，也是随机现象，那么，想必我们处理支付的选择，而且恰恰是在确定这些支付对于各局中人的现实价值方面是错误的。在做统计的时候，美元和人的生命，都能成为测定的单位，反正是能够找到某些适宜的单位，使我们有可能进行数值的计算，而不必去解决更困难得多的复杂的评价问题和非数值概念的比较。为了保证这一点，必须仔细作出这样一把数值的标尺，使它能够最好地反映出各种可能的结局对于局中人的损益。

不过，假如我们能做到这一点，要使对于蓝者和红者的支付仍旧是大小一致而符号相反，那可能性也是极小的。换言之，零和对策的基本特征将消失。我们由此得出一个结论，如果局中人在他们支付的平均数相同的时候，认为一个支付比另一个好，那么标尺（比率）就应当加以改正，而我们既然要这样做，那么对策就未必依然还代表价值的一般交换。换句话说，它显然将变成为非零和对策，但是，正如我们上面已讲过的，我们在这个领域的知识是非常贫乏的。

听过刚才讲的这些，你可以感到似乎对策论是一种相当软弱而且不完善的理论。收入的“期望”值不是经常能当作作出决定和行动的可靠的基础的。同样地，这个事实也迫使

我们明白了：我们现在还没有一种多少有系统的方法来比较对策的这些或者那些的结局是否合乎愿望。加之所有这些问题都刚好发生于我们正站在研究对策论的起点上的时候，这时我们刚刚准备着手分析最简单的有两个策略的零和对策。

如果这一切使你大失所望，那么，最终你可以抛开这书，而且你这样做要比关上一部电视机更为容易。但你们之中那些将鼓足勇气继续研究下去的人们，将来必定可以确信：尽管还有缺点，但对策论仍有饶有趣味和有益的东西可告诉你们。

往后，我们将认为局中人有足够的手段抵抗个别变幻无常的命运，这就是说，期望（平均）值完全能够供他作对策指南。

现在，我们来分析一个对策：

		红者 1	红者 2
蓝者	1	5	5
	2	5	5

如果蓝者采用他的第一个策略对抗红者的第二个策略，则红者应当付给蓝者 5 单位。在选择任何策略时，情况都依然不变。因此，这个对策与前面所述的那个对策没有多大的差异。本质的区别将是：这个对策对于红者将是不公正的。假如给这个对策的条件补充一点：每当双方开始新的一局对策的时候，蓝者都将同意每次付给红者 5 单位，那么这个对策就将变成公正的。如同前述一样，在这个对策中，采用何种策略显然是没有意义的，因为不管选择什么策略，支付将总是丝毫不差。同时，在这个对策中，侦察（就军事而言）也是

无济于事的，这就是说，（即使）预知对方的计划也是毫无用处的，而且没有它也完全行。正如我们往后将看见的那样，这是许多对策所固有的特性——假使局中人运用良好的策略的话。

顺便指出，我们所研究的这种形式的矩阵同由侥幸对策得到的矩阵相似。在纯粹侥幸的对策中各种支付不仅看起来全都一样，而且实际上是一样的。这就是说，如果各种支付是期望值，那么它们就是以同样的数字和同样的偶然事件为根据的。它们与以（人工）技巧为基础的对策，或者策略性的对策（在这样的对策中，各局中人能够在哪怕很小的程度上影响对策的结局）所不同的正是这一点。

为着回避生疏的概念，我们暂时要在支付矩阵表中没有负数的情况下设法对付过去。这样的对策按实质说对于红者是不公正的，因为，这使得他不得不总是付出、再付出。你可以把这些对策看作这种情势：红者违背自己的意愿而身处其中，但既然已陷于此境，他就希望要使对策进行得（对自己）尽量经济些。或者说，请你把它们看作这种情势：红者只要懂得怎样计算，他是能够要求抵偿的。

鞍　点

现在我们将要转入研究一个各个局中人有可能选择下述策略的对策：

		红者 1	红者 2
蓝者	1	6	5
	2	5	4

我们要提醒你注意对策论的一个基本推论：蓝者总希望收入尽可能多，但是他不能指望红者的宽宏大量。因此他轮流地探讨自己的每个策略，以便了解他如何能够多赢，甚至于如果红者有时越过肩膀瞥视他的话。他假定无论选用什么策略，红者总要采取最好的对抗措施。因此，蓝者全部写出那些在他每种选择的情况下所能得到的最坏的收入，而这正是：

				各行的极小值
蓝者	1	6	5	5*
	2	5	4	4

其中，他较喜欢的最大收入是5单位，即标上星状号(*)的那个数。这样一来，蓝者便有理由认为良好的策略是第一个策略。

另一方面，红者则分析各（纵）列，以便了解他应该怎么办？而他的基本观点，包括对对手的尊重在内，都如同蓝者。只有一点除外，即他希望的是使自己的支付尽可能小。红者在研究自己的每个策略时都假定蓝者能够猜度他的利害关系，同时采取蓝者所能用的最好的应付办法。因此，红者全部写出那些在他研究自己每个策略时发生的最坏的（即最大的）支付：

	红者 1	红者 2
	6	5
	5	4
各列的极大值	6	5*

他自然地比较喜欢最小的支付——以星状号（*）所标出的5个单位。这样一来，如果他运用自己的第二个策略，那么他的损失任何时候都不会超过5。

（这里）我们又一次遇到如同旅行者那个例子中的这样的巧合：蓝者和红者唯一探求的是那些在对付聪明的对手的一局对策中能保证确定的支付（在这个场合是5个单位）的策略，同时，每个局中人都知道：假如对手的行动不合理，那么对他来说支付将更为有利(同5个单位比较而言)。这种情势就称为**鞍点**。

总而言之，**当各行的极小值中的最大数等于各列的极大值中的最小数**的时候，就说，**对策具有鞍点**。在这种情况下，各个局中人都应当遵循这些交叉于鞍点的策略。

为了研究是否具有鞍点，各个局中人都应当既从自己的观点，又从对手的观点来考察一局对策。他要全部写出所有行的极小值，并用星状号标出其中的最大数。然后，他还要全部写出所有列的极大值，并用星状号标出其中的最小数。如果两个登记（标出）的数字相合，则对策具有鞍点，同时各个局中人一定要遵循那些对应于标出的行、列的策略。

混合策略

我们要在另一个对策（现象）中试验一下这种曾使我们解出上述例子的魔法。让我们来看下页开头的一个对策。

对应于蓝者第二个策略的各行极小值的最大数值等于4；如果蓝者将采用这个策略，那他的收入无论何时都不会小于4单位。而红者应用他第一个策略时各列极大值的最小数等于5；它的应用保证红者的损失不会超过5单位。总

红者

		1	2	各行极小值
蓝者	1	3	6	3
	2	5	4	4*
各列极大值		5*	6	

之，这里没有鞍点，我们面临着一种未研究过的情势。蓝者能保证自己的收入不小于4单位，而红者也确信自己的损失不大于5单位。或许你会说：这些数目恰好是聪明的局中人确实能够达到的；对于这一点只需要有最简单的合理的看法。他们之间的空间是本行的能手可以获得补充俘获物的狩猎场。

我们再研究一下蓝者的情况。假如他将采用第一个策略，那么红者会揭穿他的行动，并使蓝者的收入下降为3单位。假如他将采用第二个策略，那么其收入可能降低到4单位。然而，由于对红者的情况加以类似的研究结果，蓝者在每一局的结局可以获得的收入，有时是5单位，有时是6单位，而不是3至4单位。这时，他所公开的策略仍然只是“蓝者－1”和“蓝者－2”。

抉择的本身就提供了解答的秘诀。既然蓝者应当做点什么，而且他固定不变地应用某一个策略将使红者获得非法的节余，因而蓝者就必须要研究一下余下的二中取一的选择：如何应用两个策略。但是在每个单独的对局中，他迫不得已地只能应用两个策略之一，因为根据规定，每个策略乃是一个完善的行动方法，同时一个策略的应用就排除了另一个策略的应用。因此，蓝者应当要依次地时而应用这个策略，时

而应用另一个策略。

换句话说，蓝者需要一种包含有作为自己的元素的各初始策略的较为复杂的策略。按对策论术语来讲，这样的策略称为“混合策略”；而那些我们迄今只简单地叫作策略的元素所构成的策略，则称为“纯策略”。纯策略就是那些我们编上序号并且将在任一局对策中依循的策略之一。而混合策略则指导你选择（各个）纯策略。

想必你立即会发觉，类似的行动方法能使你处于一种适度的保密变为必不可少的境地之中。须知，如果红者了解到蓝者实际上将采用什么策略，那末他就必定会由此为本身捞到好处。往后，我们将会看到，保密的必要措施是完全明显地确定的：蓝者应当将他在每个单独的下个对局中打算运用的有关策略加以保密。不过，他可以让红者获得有关他以前的行动以及他的混合策略的充分情报。假如这个策略正确，那末红者就无法阻碍蓝者获得对他来说对策所允许的收入。这对于红者（的情况）来说同样也是公道的。

我们将假定我们的对手是聪明而消息灵通的。尤其重要的是，要不让他知道你准备在下一局中运用怎样一个纯策略。存在着一种出名的方法，是抵抗对手的可靠保障，这是对策的天性本身向我们提议的方法，即根据某种适宜的偶然事件（如抽签）来决定有关策略的选用。因此，这种或那种的随机机械是良好的混合策略的一个重要组成部分。这时对手丧失了预知你的行动的可能性，因为你的行动方法对你本人来说，也正如同对你的对手那样是未知的。现在，再回到我们这个例子上来（见下页开头的矩阵——汉译者注）。我们暂且假定说，红者的混合策略是取决于抛掷硬币的结果：当（硬币的）正面落地时，局中人便依循第一个策略；

		红者 1	红者 2
蓝者	1	3	6
蓝者	2	5	4

而当（硬币）背面落地时，则依循第二个策略。如果这种策略被运用于对抗蓝者的第一个策略，那末红者大致在半个对策中按3单位付出，同时在半个对策中按6 单 位 付 出。因此，在某个时间内取得的“期望”支付值，或者 它 的 平 均值，将等于：

$$\frac{1\times3+1\times6}{1+1}=4\frac{1}{2}。$$

（这里的单位代表着由抛掷硬币所决定的运用各个纯策略的相对频数，此例恰好是1 ∶ 1 。我们把每个支付乘以有利于这个支付的策略的运用的相对频数，再把这些积相加，然后除以相对频数的总和。）

混合策略（根据这些策略，局中人应当依循的纯策略时而是这一个，时而是另一个，并且应当由某种合适的抽签方法来决定在各个独立情况下的应用）的概念是对策论的基本概念之一。我们可以预先告诉你：混合策略是大多数对策的基础，它仅仅在某些特殊情况下才显得无能为力。

或许你会感觉到在选择行动方案时运用随机机械是多少有点不负责任的行为，尤其是当对策的结局具有重要意义之时。实际上，这里并没有任何不负责任的问题：那些在决定采用方案之前必须预先做出的无可争议的论断在这儿都是成立的。随机机械是在问题已经陈述清楚，支付已经确定，以

及控制随机机械（因而也控制选取策略）的相对频数已经统计出来的情况下才出现的。这样，随机机械就不是支配你的主人，而是由你自由使用的武器。至于作为决定采用方案过程中即将完成的一个环节是没有深入思考能力的机械，这一点是没有关系的。炸弹同样也不是有智慧的武器。说实在的，就连一位轰炸机飞行员有时想念某一位金发女郎的程度都可能远胜过他对轰炸目标的选择呢。不言而喻，如果我们回过头来考察这一连串的事件，那么不妨初步认为我们进行的是一件目标集中的聪明的工作。

相对频数

在稍后我们了解到应如何确定混合策略时，我们将一直使用相对频数为表现形式来表达其结果。比如说，蓝者必须以8∶5的相对频数应用他的两个策略。这也就是意味着，蓝者在一连串的对策中，应用第一个策略与第二个策略之比数为八局比五局。不过，假如我们不先给研究的对象取个名字，那就将时常出现含糊不清的说法。从这会儿起，我们就要把构成相对频数的数字简单地称为频率（oddment）。这样，如果相对频数等于8∶5，那么当我们讲到8这个数字时，就将称作是它的频率。荷·威尔伯斯特[①]使我们相信该词的用法差不多是可以接受的，同时也是合乎情理的。从数学的观点来看，“频率”这个概念是个大发明，因为相对频数8∶5等同于相对频数16∶10（或等同于24∶15，或$4:2\frac{1}{2}$等等）；这就向我们提示：频率8可能等同于频率16。因而，你要是认为频率有任何肯定的意思，这种想法就

① 他是一部通俗详解辞典的作者。——俄译者注。

没有任何意义。谁也不能使你相信这不对。但是，在我们使用这个词语时，我们指的就是企图同时利用一般的比较法比率建立一整个数系。这个问题的出现是由于在统计相对频数时，我们是逐个地计算频数的。而有时我们需要引证其中的某一个频数。

为着方便，我们将用零频率来表示某些不使用的策略。这样，关系式3：0：2即意味着：策略一和策略三必须以3：2的相对频数使用，而策略二一般不用。

确定相对频数的法则

我们不打算对你做逻辑上的论证，来说明怎样找出正确的混合策略，因为我们不知道假如不借助数学，该怎么解答这种问题。然而，我们会给你许多纯粹的经验法则。利用若干简单的，但有时极令人厌烦的算术运算，这些经验法则就能帮助你计算出一个好的混合策略。

计算2×2对策的次序如下：

第一步 先检查一下对策是否具有鞍点，这个不难做到。这只要把各行的极小值的最大数同各列极大值的最小数比较一下，并且确认它们不相等，就足够了。如果具有鞍点，那么你能做的事情也就结束了：最优策略就是蓝者和红者在鞍点相交的那个纯策略。

第二步 如果没有鞍点，那么最优策略就是混合策略。

红者

1	2
3	6
5	4

请你忘掉鞍点，并且照下面方法进行。

先从研究红者的策略开始，利用上页的支付表数字，来研究红者的第一和第二策略：

从第一行的数字里减去第二行的数字，并把结果写在新的数格内：

红者

1	2
-2	2

于是，应用第一策略的频率就将等于下列支付表中带斜线格内的那个数字：

红者

1	
	2

同时，应用第二策略的频率将等于下列支付表另一个带斜线格内的那个数字：

红者

	2
-2	

这些数字中总有一个是负数；不要去注意负号。记下的数字表示出红者采用自己策略的相对频数是 2:2；这也意味着两个策略应以同样的频率，即以 1:1 的比例使用。换句话说，红者必须利用如抛掷硬币那样能提供同等概率的机械来选用

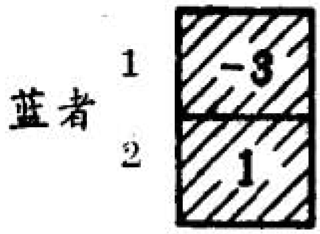
自己的策略。

现在特别注意观察一下斜线方格中不寻常的对称：红者运用第一策略的频率不是在红一1的列里，而是在红一2的列里。

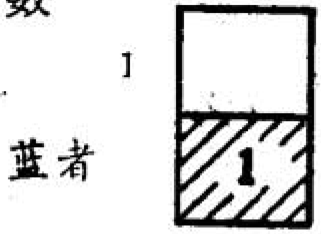
我们所叙述的确定相对频数的经验法则比起它原来的说法稍微复杂了点儿，不过这个经验法则将作为我们研究更加复杂的对策时需用的其它一些法则的基础。从教育学的观点看，你在钻研理论的入门阶段忍受点困苦也是很合理的事情。确定蓝者的最优策略的法则也是这样，所不同的地方就是全部转动了90°。我们将这个也图示如下：

蓝者	1	3	6
	2	5	4

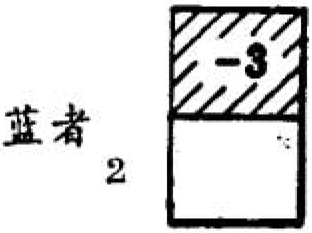
从第一列中减去第二列，就得出：



那么，在斜线格内的数



和在斜线格内的数



就是蓝者适宜采用第一、第二种策略的概率。蓝者必须使用的混合策略中，采用第一种策略要比第二种策略少三倍，即1∶3的比例。

现在，抛掷硬币已经提供不出我们所要求的相对频数。在本章结尾，我们要回到实用的随机机械问题上来，这些机械或许能提供所需的相对频数。

讲出来的方法简单得有受人轻视的危险。我们再举一个例子来实际应用一下：

红者

		1	2
蓝者	1	7	3
	2	2	11

（别看它象数码，这可不是克列普思赌博①。）一开始，我们检查一下对策的鞍点：

红者

		1	2	行的极小值
蓝者	1	7	3	3*
	2	2	11	2
列的极大值		7*	11	

因为带星状号的数字不相等，所以没有鞍点。很重要的是别忘掉了这个检验，因为如存在鞍点，那么我们的工作也就到此为止了。此外，我们应用来寻找混合策略的这种方法，如

①指一种用两根骨头进行的狂热的美国式赌博。——俄译者注。

果误用于有鞍点的对策中，通常都会得出不正确的结果。

于是，我们不再想已完成的工作，而从头再开始。这回从寻找红者的混合策略做起：

红者

1	2
7	3
2	11

从第一行的元素中减去第二行的元素，我们得到：

红者

1	2
5	−8

因此，采用第一个策略的频率将等于斜线格内的数字：

红者

1	
	−8

而采用第二个策略的频率将等于另一个斜线格内的数字：

红者

	2
5	

这样，相对频数将以 8:5 有利于多采用第一个策略，即红者必须以8:5的比例采用他的第一、第二策略。用类似的方法，我们求出蓝者必须以 9:4 的比例采用他的第一、第二策略。

对策的得失

我们有时候指出说：在每一局对策中都有某个确定了的支付，即一个好的局中人同另一个好的局中人对策时赢来的支付。这个支付被称为对策的得失。假使你的对手没出差错的话，你的平均收入就不可能超过对策的得失。如果这是正数，那么它就等于蓝者在同红者每一局对策之后，为了公道起见所必须支付给对方的那个数目字。

很多公允的沙龙游戏都有等于零的对策的得失。

在有鞍点的对策中，对策的得失同鞍点的支付相一致。如在对策

		红者 1	红者 2	行的极小值
蓝者	2	6	5	5*
蓝者	1	3	4	3
列的极大值		6	5*	

中，对策的得失等于5，这是因为如果局中人正确地运用策略，即蓝者采用第一个策略来对付红者的第二个策略，那么蓝者总会赢得5个单位。

在要求使用混合策略的 2 × 2 对策中，对策的得失等于平均的支付。这个支付是由于其中一个局中人采用最优混合策略对付另一个局中人的某一个纯策略而得来的。如在对策

		红者 1	红者 2
蓝者	1	3	6
蓝者	2	5	4

中，如同我们在前面看到过的那样，红者必须以如抛掷硬币来决定的同一种频率运用两个策略，对于蓝者的第一个策略的平均支付将等于：

$$\frac{1\times3+1\times6}{1+1}=4\frac{1}{2},$$

这也就是对策的得失。假使我们来计算一下蓝者的最优混合策略（我们仍记得其频率等于1:3），对于红者的第一个策略的平均支付，其结果也是同样的：

$$\frac{1\times3+3\times5}{1+3}=4\frac{1}{2}。$$

在要运用混合策略的2×2对策中，如果一个局中人采用最优混合策略来对付另一个局中人的一个纯策略，那么平均支付总是同样的$\left(\text{在我们的例子中是}4\frac{1}{2}\right)$。这个平均支付就是对策的得失。我们可以利用相反的原理，根据对策得失的固定性来判断所选择的相对频数的正确性：如果假定的最优混合策略在用于对付对手的某一个纯策略时，不能得到同样的支付，那么假设就是不可靠的，相对频数也并不是最好的。

改变规模的影响

我们要为三个一般的对策寻求解答，这样做一方面是为了实践，另一方面则是为了用实例来证明某些一般的法则：

红者

		1	2	蓝者的相对频数
蓝者	1	8	1	2
	2	4	6	7
红者的相对频数		5	4	

红者

		1	2	蓝者的相对频数
蓝者	1	11	4	7
	2	7	9	2
红者的相对频数		5	4	

红者

		1	2	蓝者的相对频数
蓝者	1	16	2	2
	2	8	12	7
红者的相对频数		5	4	

所有这三个由各种情况古怪地凑合成的对策全都要求使用一模一样的混合策略：对蓝者来说都是按2:7的比例，对红者来说都是按5:4的比例。为什么这三个对策必须同样进行呢？我们会发现：如果在第一个对策的每个支付上加上3个单位，那么第二个对策就可以由第一个对策得到

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + 3 = \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

而第三个对策则可以由将第一个对策的每个支付乘以2得到：

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \times 2 = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$$

这些对策实例证明了下面这条一般法则：在所有支付上都加上一个常数值或者都乘以一个正的常数，对于指导对策的方法没有影响。

这三个实例中得到的对策的得失是各不相等的：

$$\frac{5\times8+4\times1}{5+4}=4\frac{8}{9},$$

$$\frac{5\times11+4\times4}{5+4}=7\frac{8}{9}=4\frac{8}{9}+3,$$

$$\frac{5\times16+4\times4}{5+4}=9\frac{7}{9}=4\frac{8}{9}\times2。$$

这样一来，在指导对策的方法不受在所有支付上都加上一个常数或是都乘上一个常数的影响的同时，对策的得失却在变化着。

这个现象的含义在于说明：当把全部支付都加上一个常数时，起变化的仅是对策的不公平程度；而当把全部支付都乘以一个常数时，起变化的也只是计算支付金额的货币单位而已。

以优对劣的对策

现在我们了解了有关2×2对策的几乎全部内容，除了遇到这样的情况以外：假设一个局中人（如蓝者）在对策中利用着最优策略，而另一个局中人（如红者）则无最优策略可利用。这时，我们必须区别两种情形。

第一种情形 假如对策中有鞍点（即纯策略就是最优策略），那么红者如不采用自己的最优纯策略，他就将大手大脚，随意挥霍。

第二种情形 假如混合策略是最优策略，那么不管红者怎么行动，蓝者的好的对策将一直保持同样的平均支付。与

此类似，假如红者也依照正确的混合策略行事，那末，不管蓝者怎么行动，其结果在任何情况下都将是相同的。对于拥有更多策略的对策（如2×3对策）来说，答案将会是另外一种更使人感到满意的样子。

到现时为止，我们一直是借助几个基本法则，采用数字和支付表格来研究问题的。我们把那些死板板的公式，图表都当作对策看待。为着改变一下这状况，我们想提供几个较为生动的事例。假使你原先就对我们把若干事例称为“对策游戏”感到惊奇，那么下述事例则更会叫你惊异不已。（其哲学）原理就在于：几乎一切东西原来都能被看成是对策。

例二　轰炸行动

让我们把一个普通的2×2对策假定为一个军事行动。设想蓝者的两架轰炸机起飞去执行一项任务。一架携带着炸弹，而另一架装备着干扰雷达站的仪器、测定对轰炸目标造成的损失情况的装置或其它什么东西。它们飞行的编队是这样的：头一架轰炸机受到后一架轰炸机的炮火掩护，显然比较后者受到的更为有效得多。如何保护携带炸弹的这架轰炸机，使之不被红者的驱逐机击落，这个问题比其余问题都更加优先受到考虑。现在的难题在于：这两架轰炸机中必须由哪架携带炸弹——第一架或第二架？哪架会遭到红者驱逐机袭击？

可能会有以下策略：

蓝者-1：带炸弹的轰炸机位置较不利；

蓝者-2：带炸弹的轰炸机位置较有利；

红者-1：在较不利的位置攻击轰炸机，

红者-2：在较有利的位置攻击轰炸机。

我们假定一架携带炸弹的轰炸机在较不利的位置上遭到袭击后生存的机会为100之中的60，在较为有利位置上遭到袭击后生存的机会为100之中的80，而它倘若未遭到袭击则生存机会为100。这种情势可以用支付表表达出来。

		红者 1	红者 2	蓝者的相对频数
蓝者	1	60	100	20
	2	100	80	40
红者的相对频数		20	40	

只要我们将这个对策如同上述那些对策那样加以分析，就会发现无论是红者还是蓝者都必须交换自己的策略，两者的相对频数是相等的，在20个情况下采用第一种策略的同时也必须在40个情况下采用第二种策略。换句话说，蓝者须以40∶20的比例侧重于将轰炸机置于受保护的位置上，而红者则最好（也是以40∶20的比例）去攻击在受保护的位置上的飞机。（不言而喻，40∶20的相对频数与2∶1是等值的。）对于蓝者来说，对策的得失等于：

$$\frac{20\times60+40\times100}{20+40}=86\frac{2}{3}\%$$

这样，如果蓝者运用合适的随机机械来选择自己的策略，而不是听凭自然的结果，那么他们可期望$86\frac{2}{3}\%$的炸弹（不是80%）击中目标。这个方法获得的好处约为8%。

例三　“达依克威里”鸡尾酒会

在上述例子中，运用混合策略获致的好处为8%。这并

不是意味着好处总是这么不起眼。让我们再看一个发生在酒吧间的小插曲。亚历克斯和奥拉夫正在聊天消磨时光。

“我会一种奇妙的游戏”，亚历克斯说，“我们互相伸出一个或两个手指。如果我们俩都是伸一个指头，那末你要买一杯达依克威里酒给我。如果我们俩都是伸两个手指，那么你要买两杯酒。如果我们俩伸出的手指不同数，那么我就只从你那儿拿10美分。这会帮我们度过这段时间的。”

奥拉夫仍是泰然自若：“我觉得，无论如何，在开始时，这是一种很枯燥无味的游戏。”

他凝视着天花板，并且有好一阵子无声地嚅动着嘴唇，然后才说道：“如果你在每一局之前能够付给我42美分当作我要给你买的那些每杯55美分的酒价的部份补偿的话，那我将乐意地同你共度时光。”

“41美分。”阿历克斯说。

“那好吧，”奥拉夫叹了口气，“在三十局中，你至少都要付出42美分，但我希望这个游戏不至于拖那么久时间。”

在这个对策中，支付表有以下形式（阿历克斯-1策略的意思是一个手指，如此等等）：

		奥拉夫 1	奥拉夫 2
阿历克斯	1	55	10
	2	10	110

幸好奥拉夫立即发现对策对他是不公平的。因此，他坚持要求补偿，以使游戏有公道的条件能够让他进行正确的对策。

奥拉夫应该如何对策呢？我们作个一般的演算：

		奥拉夫 1	奥拉夫 2	阿历克斯的相对频数
阿历克斯	1	55	10	100
	2	10	110	45
奥拉夫的相对频数		100	45	

这样一来，奥拉夫就应以100∶45的比例运用他的混合策略（时而伸一指，时而伸两指）。只要他是这样做，而同时阿历克斯老是伸一指，那末他在一局中的平均付出为

$$\frac{100\times55+45\times10}{100+45}=41\ ^1/29。$$

与此相似，如果阿历克斯老是伸两指，奥拉夫将平均损失

$$\frac{100\times10+45\times100}{100+45}=41\ ^1/29。$$

这样，不论阿历克斯怎样行动，他的平均付出确确实实是41 $^1/29$美分。所以，奥拉夫以100∶45（或20∶9）的比例应用混合策略时，他就能够对游戏十拿九稳，并且计算出他必须向阿历克斯索取的补偿值，来使游戏的双方都不吃亏。

对阿历克斯来说，最好的策略同样也是以100∶45的比例运用混合策略。这能使他在每一局之后靠得住有41 $^1/29$美分的平均收入。请注意：假使阿历克斯一成不变地采用奥拉夫很快就能猜到的某一种纯策略，那么他只能保证自己获得10美分的好处。只要把这10美分同采用混合策略保证能赢

得的平均收入41 1/29美分比较一下，那就显而易见地告诉我们，在这种情况下，混合策略比较纯策略要优越上好几倍。

在一般情况下，如果位于某一条对角线上的一对方格内的支付比另一条对角线上方格内的支付小，那么就不可避免地要运用混合策略。

例四 语言游戏

一个陌生人走到斯蒂弗跟前，问他是不是愿意玩一种猜硬币面的游戏。斯蒂弗回答说，现在来玩这种费劲的游戏是太热了。于是，陌生人又建议说："好吧，那我们就躺着同时说'正面'或是'反面'，这样也很有趣的。当我说'正面'，而你说'正面'时，（每次）我就输给你30美元；如果正相反，就输给你10美元。为着公平合理，当我们说的都是同一面时，（每次）你就得付给我20美元。"

在周围的人们（他们当时正在一艘航行在密西西比河上的轮船上）还没来到的时候，斯蒂弗想到了自己恐怕应该快点儿喊警察，而别跟这位陌生人玩这个把戏。这个问题比游戏本身更引起他的兴趣。为此，他愿意进行下页开头的演算。

对斯蒂弗来说，对策的得失等于：

$$\frac{30\times(-20)+50\times10}{30+50}=-1.25。$$

		陌生人 正面	陌生人 反面	斯蒂弗的相对频数
斯蒂弗	正面	-20	30	30
	反面	10	-20	50
陌生人的相对频数		50	30	

这样，即使斯蒂弗以3∶5的比例运用最优混合策略交替说正、反面，他所能期望的最好结果也就是在每局中平均付出1.25美元。他的猜疑被证明了。

例五 进攻和防御

蓝者拥有两个防御工事。他们只能有把握守住其中一个，而不能同时守住两个。说到红者，他们也只能进攻一个防御工事，而无法同时进攻两个。其中一个防御工事的重要性比另外一个工事要大三倍。双方应该运用什么样的策略呢？

让我们将不太重要的工事评价为1个单位值。于是，如果两个工事都安然无恙，支付为4；如果较重要的一个工事安然无恙，支付为3；如果不太重要的那个工事安然无恙，则支付为1。我们把防守（或进攻）较重要的一个防御工事标记为策略1，便得下面的支付表：

		红者 1	红者 2
蓝者	1	4	1
	2	3	4

当我们记下行的最小数和列的最大数时，便很容易确定：这里没有鞍点。因此，这里要求运用混合策略。我们来做个一般的演算：

		红者 1	红者 2	蓝者的相对频数
蓝者	1	4	1	1
蓝者	2	3	4	3
红者的相对频数		3	1	

因此，蓝者应以3：1的比例偏重于防守较重要的这个工事，同时，作为红者则应以三倍的频率去攻击那个较不重要的工事。对策的得失等于3 $^{1}/4$。

这个例子初看上去跟轰炸机的例子很相似，但请你注意（两者的）策略是多少有差异的。在上述例子里，红者较为有利的是去攻击较不重要的目标。

例六　在音乐厅近处会面的问题

有一回，在冬季里，塞恩和詹纳约定六点钟左右在音乐厅旁边会面。若他来得太早，而她还没到那儿，那他就只好忍受拥挤，并在泥泞不堪的街道上蹓达到她到来为止。他认为类似的情况应评价为-1。若她来得比他早，那她会挨冻受淋。在这种情形下，等待他的福份被

评为-3。于是，对策便成为：

		詹纳		
		早到	晚到	塞恩的相对频数
塞恩	早到	0	−1	3
	晚到	−3	0	1
詹纳的相对频数		1	3	

这个对策要求混合策略。塞恩必以3∶1的比例选择早到或晚到。平均支付等于-3/4。

对策论提供给詹纳的答案，恰恰是以1∶3的相对频数有利于迟到的混合策略。这种答案只具有教学研究上的意义。须知她无疑不喜欢使塞恩扫兴的。对支付感兴趣的是塞恩，而她只起自然的作用。

例七 暗 房

戈尔迪正在暗房里将一张珍贵无比的底片显影——底片拍的是刚出生8分钟的婴儿的相貌。由于睡眠不足，他一向无可责难的技术竟出了差错。他手抚鼻子，独自哼唱着，等待着熬过15分钟。

忽然，他停住不哼不唱了。

他使用的是哪种显影剂？是正常的抑或是不久前他冲淡了准备印相用的那种？对此问题，他先是采取了盎格鲁撒克逊的态度，而后便开始分析其处境。

若显影剂是正常的，那15分钟正合适。我们把这种情况评为10个单位！若显影剂已被冲淡了，戈尔迪还可以冒险试用一下反比例法则，可惜的是，他这样试用常常都会失败。由于他把显影剂冲淡两倍，那么如果要显影30分钟，底片的质量损失不大，这样的结果可评为9个单位。但我们要假定的是他在冲淡的显影剂里显影15分钟。那样他将得到一张反差很弱的底片（不很妙，但多少总可补救一下）。这种情势可以被评为6个单位。如果是在正常显影剂中显影30分钟，那又会有什么危险呢？底片上会出现粗大颗粒、翳影、反差强烈，如同在蓝色晒图纸上见到的那个样子。这种情况的评价不会大于2个单位。

于是，对策的支付表可以写成如下形式：

		自然 1	自然 2	戈尔迪的相对频数
戈尔迪	1	10	6	7
	2	2	9	4

在这个对策中存在如下策略：

戈尔迪-1：显影15分钟；

戈尔迪-2：显影30分钟；

自然-1：正常的显影剂；

自然-2：冲淡过的显影剂。

看来是要求采用有利于较短时间显影的相对频数为7∶4的混合策略。

在应用这个策略的情况下，他期待的收入将等于对策的得失

$$\frac{7\times6+4\times9}{11}=7\frac{1}{11}。$$

严格来说，他本来必须改换自己的策略。因为既然他相信底片质量的好坏大致同时间成正比，那么他就可以从每个策略中利用一点儿，从而把显影时间变为：

$$\frac{7\times15+4\times30}{11}=20\frac{5}{11}\text{（分钟）}。$$

例八　生　　日

在结束了特别劳累的一天工作之后，弗兰克急急忙忙回家去。就在这时候，他猛地记起了：今天是卡蒂的生日！难道不是这样吗？这时除花店外，所有的商店都已关门了。倘若她的生日不是在今天，同时他也没带礼物回家，那么情势就是中性的，即支付等于0。倘若她没到生日，而他却握着一束鲜花突如其来地回到家中，那么他恐怕就得成为人家的笑柄，不过他仍可占上风，如此的结局可评为1。倘若她确是过生日，他又是及时地记起了这事，那么这当然可评为1.5。

而如果在这种情况下，他却双手空空地回去，那么他就糟了，这样的形势应评为—10。

于是，他便构想出支付表

		自然 非生日	生日	弗兰克的相对频数
弗兰克	空手回去	0	-10	0.5
	带着花束	1	1.5	10

由此可见，他的混合策略以10∶0.5或20∶1的相对频数有利于带花束。

在本例中含有未曾料到的实物教学，为此，读者应当感谢最早阅读本书手稿那批人中的一位爱吹毛求疵的先生。非常遗憾，在本例中作者忘了检验支付表的鞍点，而须知这鞍点当然是有的：弗兰克无论何种情况都应当带花回去。作为读者确实也必须这样做，而不管他自己根深蒂固的习惯如何。

随机选择的支付表可能拥有鞍点的概率对小的支付表来说是相当大的。在2×2对策情况下，有利于鞍点的机会是2∶1；在3×3对策时，是3∶7；在4×4对策时，是4∶31。而在9×9对策下，这种机会便下降到一千分之一。

例九 街头小贩

梅里尔获准在杨基体育场出售墨镜和伞。他的买卖好坏显而易见地取决于天气情况。

他根据经验可知，在雨天大致能卖500把伞，而在晴天

大致能卖100把。而在后一种情况时，他估计同时还能卖出1000副墨镜。他的每把伞是50美分购进，按1美元售出的。而墨镜则是每副20美分购进，50美分售出的。他想在这趟生意中投资250美元。没有卖出的货对他来说，都是纯亏损（在家里孩子们会把货物弄去玩耍）。

他将所有的这些事实都概括在下面的盈利表中：

		售出情况 雨天	晴天	相对频数
预计采购数	雨天	250	−150	5
	晴天	−150	350	4

看来，这个对策是混合策略的，所以他应赶快拿定主意。他要会挑选出一种稳妥的策略，以预防天气作难。

在解答对策过程中，他发现必须按5∶4的相对频数采购适用于雨天或晴天的货物，这样，对策的得失等于

$$\frac{5+250+4\times(-150)}{5+4}=72.22\text{（美元）。}$$

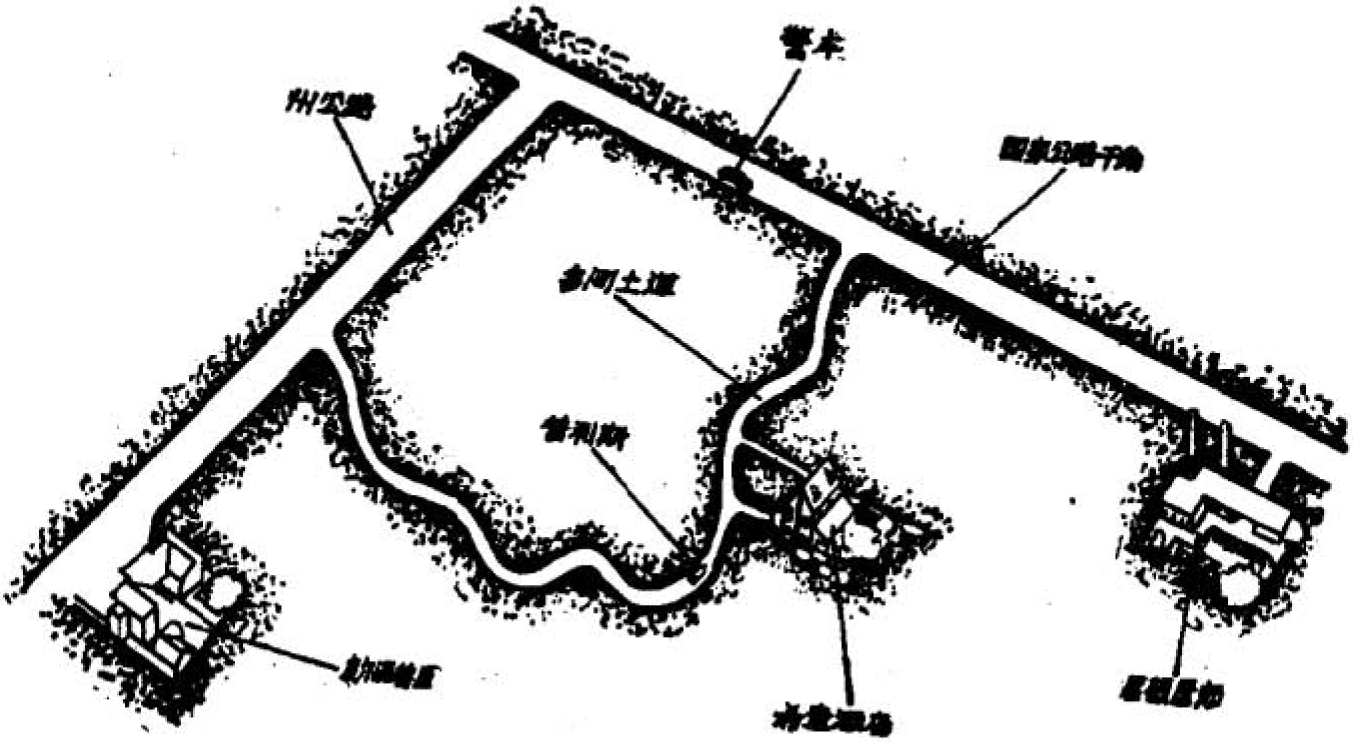
他不按相对频数办事①，却决定将投资的5／9采购雨天的

①这种二中择一方法的特性在第252页上有分析。——作者原注。

货物，用4／9采购晴天的货物。这样一来，他要花161.11美元购进伞（包括用22.22美元购进晴天计划内的伞），并花88.89美元购进墨镜；准备稳稳当当地盈利72.22美元。

例十　警　　车

这个例子稍为更合乎实际些。警察局的行车调度员用无线电向正沿着国家公路干线巡查的二号值班警车发出了通报。她说得是那么急促，以至她只能说出这些话：“……刚才开车沿旧的乡间土道从希查酒馆驶出来了。潜逃方向不明。普利斯可能受了重伤。但是他如果能迅速赶到类似黑顿那样的好医师那儿，那末他还有获救的一半机会。甚至连皮克逊兽医也能挽救他，但那样获救的机会要减少一半。”



郡长助手根杰逊终于从机关枪和自己的45码皮鞋上解开了缠结的送话器软线，回答说：“明白。如果他是朝黑顿那边去，我们一定能截住。要是他往兽医那儿去，在州公路上我们有百分之五十的可能截住他。我们必须中途截住他，因

为我们没法追赶上他。不久前鲁特郡长助手的变速箱在倒车时卡住了，从此我们的车速简直就成了全局的耻辱了。”

在行驶中又听见总部无线电台的声音，可这回传出来的不是女调度员悦耳的话语，而是郡长利巴嘶哑的嗓音：“要是你们还知道点什么东西，请别在无线电里说了！他的汽车里装有第一流的收音机。截住他！”

鲁特忽然想起了什么主意，于是他不再忙着用手拉动变速器（排挡）了。

“根杰逊，今天我们不必用机关枪了，倒是需要一支铅笔呢。要知道，这恰好是两人对策。调度员已经将我们需要的线索通知我们了。”

“你是打算利用她的推测吗？”

“难道你还能有比这更好的东西？她有一种直觉。此外，这儿还有一份总部来的情报。让我们先看看……假定我们朝黑顿驶去，同时假定普利斯也是上那儿去了。那么我们就会逮住这个江洋大盗，如果他再一次不先开枪的话。但他要是上皮克逊那儿去，有四分之三的可能是那老头儿会把他弄死的。”

“不明白。”

“喏，这非常简单。要知道，黑顿有能救活他的一半机会。而如果他驾车去皮克逊那儿，则可能性又减少一半，一半之一半就是四分之一。因此，他会死的可能性就等于四分之三，也就是一减去四分之一。明白了吗？”

“啊，当然明白啦！”

“我们现在要是往皮克逊那儿去就叫人难于理解了。他最重要的是要到黑顿那儿去，在这种情况下，我们只能估计大夫弄死他的概率总共不过一半。”

“你应该从一里减去一半。”

“我正是这样做的。现在再假定他仍要往皮克逊那儿飞驶而去，那么无非是发生两者之一的情况：第一种情况我们抓住他，这可能性是一半；第二种是我们没能截住他，这概率也同样是一半；但还存在着兽医把他弄死的概率，这等于四分之三。这样，他落入我们手中而不是医师手中的一般概率等于四分之三的一半，即八分之三。再加上他不如我们机智这一点，算是一半的概率，因而我们就会有八分之七的概率。”

“我一点也不喜欢这些个把戏。当我们在这里胡说八道时，他早就溜掉了。”

“这个你不必担心！要知道他也应该把一切都盘算盘算呢。但他的处境比起我们来显然是艰难得多了。这样，我们得到什么？

		普利斯驱车往 黑顿	普利斯驱车往 皮克逊
警车往	黑顿	1	3/4
	皮克逊	1/2	7/8

“用分数来讲解不大方便。让我们将它们都乘以八。我听说这没什么坏处，而且会使过程简化。”

		普利斯驱车往 黑顿	普利斯驱车往 皮克逊
巡逻队	黑顿	8	6
	皮克逊	4	7

“现在清楚了，这并不是件容易的事呢……”

“这我知道。我们不能按某种单一的策略行动。因此，我得计算出最优混合策略。

		普利斯驱车往 黑顿	普利斯驱车往 皮克逊	巡逻队的相对频数
巡逻队	黑 顿	8	6	3
巡逻队	皮克逊	4	7	2
普利斯的相对频数		1	4	

“对啦……三对二利于去黑顿家。请问现在你手表上是多少秒？”

“二十八秒。”

“好极了！上黑顿家去。这部车子要是没有这么长的行李箱，那就更容易毁坏了……”

“这是秒针的魔法——简直愚蠢，”根杰逊埋怨说，“我们为什么不马上上黑顿家去呢？”

“那就多少牵涉到这种情况下我们的机会了，但毕竟…假如我们唯一的解决办法是驾车去黑顿家，那么普利斯就有75%的可能冒险去皮克逊家，从而从我们手中溜掉。现在他必须以80%的冒险性采取行动，而不以他原来要采取的策略为转移。再说时间：前30秒同后20秒的比例恰好是3∶2。”

关于2×2对策解法的结论

为着给本章第一部分的技术资料做个总结，我们再来解答一个例题。

研究对策：

红者

		1	2
蓝者	1	−1/3	1/4
	2	1/2	0

我们希望知道，在这个对策中应该怎样做。假定我们不喜欢分数和负数。我们知道：将支付表的全部数字都乘以一个同样的常数或者在支付表的每个元素上都加上一个同样的常数对于对策的进行没有影响。因此，为了消除所产生的烦恼，我们要把支付表里的全部数都乘以某个适当选择出的数，如12。这会改进我们上述支付表的外观：

红者

		1	2
蓝者	1	−4	3
	2	6	0

为了避免负数，我们在每个元素上都加上一个数，如4。这就形成了以下的支付表：

红者

		1	2
蓝者	1	0	7
	2	10	4

现在我们已经为解答做好了一切准备。当然，我们将从检验鞍点开始做：

红者

		1	2	行的极小值
蓝者	1	0	7	0
	2	10	4	4*
列的极大值		10	7*	

极小值等于4，极大值等于7。因为没有鞍点，所以我们的工作尚未完结。从研究红者的情势开始：

红者

1	2
0	7
10	4

经过元素相减，我们获得：

红者

1	2
-10	3

因此，在以下方格内得到了红者－1和红者－2的策略的相对频数：

1	
	3

2	
-10	

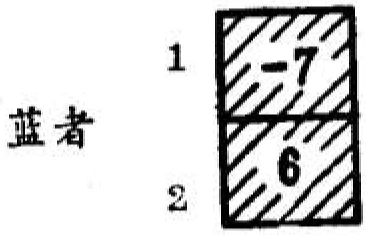
其中一个数是负数，但我们对相对频数的符号一直是不予重视的。所以，对红者来说（如果这一切都做得正确），最有

利的策略就是3:10的混合策略。

我们接下去的任务是替蓝者计算相对频数。

蓝者	1	0	7
	2	10	4

从每个元素中减去右边的数，得到：



在方格内获得相对频数：

这样，如果一切正确，蓝者必须以6:7的相对频数运用 混合策略

我们把每个混合策略同对手的每个纯策略作一比较，来检验我们计算的正确性。将蓝者6:7的策略用以对抗红者－1策略，结果得出

$$\frac{6\times0+7\times10}{6+7}=\frac{70}{13},$$

而对抗红者－2策略，得出

$$\frac{6\times7+7\times4}{6+7}=\frac{70}{13}.$$

另一方面，将红者3:10的策略用以对抗蓝者-1策略，结果得出

$$\frac{3\times 0+7\times 10}{3+10}=\frac{70}{13},$$

而对抗蓝者－2策略，得出

$$\frac{3\times 10+10\times 4}{3+10}=\frac{70}{13}。$$

这样一切都很顺利。蓝者和红者都必须按照相应的6:7和3:10的相对频数进行对策。

70/13这数是否就是对策的得失呢？不是的。我们还会记得：我们把（原来支付表内的）每个数都乘以12，并加上4了。只要把这些倒着做一下，我们便能够求出对策的得失。因为在先头我们曾加上4，所以现在我们要减去4，即

$$\frac{70}{13}-4=\frac{70-52}{13}=\frac{18}{13}。$$

再往下，因为在先头我们乘以12，所以现在要除以12，即

$$\frac{18}{13}:12=\frac{18}{13\times 12}=\frac{3}{26}。$$

这样，我们的对策得失等于3/26。这一点用混合策略在最初的对策里试验一下，就能够核实。假定我们取蓝者6:7的混合策略对抗红者－2的策略；这便得出

$$\frac{6\times 1/4+7\times 0}{6+7}=\frac{3}{26},$$

正是不出所料。

下面我们为那些想做做练习的读者准备了一系列练习题。因为这大概是巩固一种新概念的最佳办法。在本书末尾提供有答案。

练 习 一

确定下列对策的相对频数和得失：

1. 红者

蓝者	1	2
1	7	4
2	1	2

2. 红者

蓝者	1	2
1	5	8
2	6	7

3. 红者

蓝者	1	2
1	−5	−8
2	−6	−7

4. 红者

蓝者	1	2
1	2	4
2	8	6

5. 红者

蓝者	1	2
1	1	2
2	4	3

6. 红者

蓝者	1	2
1	1	2
2	3	4

7. 红者

蓝者	1	2
1	1	3
2	4	2

8. 红者

蓝者	1	2
1	0	2
2	3	1

9. 红者

蓝者	1	2
1	−1	1
2	2	0

10. 红者

蓝者	1	2
1	−3	1
2	3	−1

11. 红者

蓝者	1	2
1	4	−4
2	−4	4

12. 红者

蓝者	1	2
1	4	−5
2	−5	4

13. 红者

蓝者	1	2
1	4	5
2	5	4

14. 红者

蓝者	1	2
1	5	88
2	88	5

15. 红者

蓝者	1	2
1	4	−5
2	−4	5

16. 红者

蓝者	1	2
1	4	−5
2	−3	5

17. 红者

		1	2
蓝者	1	1	3
	2	7	5

18. 红者

		1	2
蓝者	1	1	-3
	2	-7	5

19. 红者

		1	2
蓝者	1	1	100
	2	1000	10

20. 红者

		1	2
蓝者	1	3	-3
	2	-4	4

2×m对策

如果在对策中，一个局中人有两个策略，而另一个局中人有许多策略，那就简略地称做“两对m的对策”，记为2×m对策。字母m可以是大于2的任何整数，本章所余下的部分就是专门陈述这类对策。幸好，除2×2对策的解答方法外，对这些对策的解法基本上不要求知其所以然。

鞍点

2×m对策不是具有鞍点（即好的纯策略），就是具有根据两个纯策略做出的好的混合策略。因而，它们也能够归结为2×2对策。这可以用各种各样的方法来完成。

开始时，总要检验是否没有鞍点；这个过程并不困难，而假如有这样的点，则工作可以告终。我记得，为此我们择录各行的极小值，并挑出其中最大的一个。接着，我们择录各列的极大值，并挑出其中最小的一个。如果这两个我们称为最大数和最小数的值是相等的，那么就具有鞍点，而两者共同的数值也就是对策的得失。我们假定有下列对策：

		红者 1	红者 2	行的极小值
蓝者	1	4	4	4
蓝者	2	5	3	3
蓝者	3	6	5	5*
蓝者	4	1	3	1
蓝者	5	5	4	4
列的极大值		6	5*	

这个对策就有鞍点：蓝者－3对抗红者－2，因为最大值等于最小值均等于5。

优　势

如果对策中没有鞍点，那么请你考虑那个有许多策略的局中人的策略。在这种情况下，引人注目的是其中若干相比之下很差的策略是永远不会得到利用的。我们假定蓝者是一个具有许多策略的局中人。在各个方格成双成对地进行比较的基础上，如果其中的一个策略优越于另一个，则头一个策略就是有优势的，而后一个就必须从支付表中除去。这样的

排除，甚至在一个具有优势的策略的元素与另一个策略的元素相等的时候，也能够发生。作为例子，让我们研究对策：

		红者 1	红者 2
蓝者	1	2	5
	2	4	3
	3	3	6
	4	5	4
	5	4	4

比较蓝者－1和蓝者－3策略，即

蓝者	1	2	5
	3	3	6

显然，蓝者－3策略是有优势的。与此相似，比较蓝者－2和蓝者－4策略，也比较蓝者－4和蓝者－5，即

蓝者	2	4	3
	4	5	4

蓝者	4	5	4
	5	4	4

我们看得出：蓝者－4策略在两种场合里都占优势。因此对策就可以化为下面形式：

蓝者 \ 红者	1	2
3	3	6
4	5	4

同样地，假如红者有许多策略，同时在各格比较的基础上，有一列比另一列占优势，那么就可以把占优势的这一列排除出去（因为我们还记得，红者感兴趣的是尽可能小的支付值）。

这种简化对策的原则的益处是显而易见的。这种原则当然也适用于2×2对策，但是当存在着有优势的行或列的时候，同时也就存在着鞍点。

混合策略

当对策里没有鞍点时，请你检验那个有许多策略的局中人的策略优势。如果局中人（如蓝者）有两个以上的策略，那末就删除掉所有较劣的（从属的）策略。如果这样的局中人是红者，那么就消除所有占优势的策略。于是，所余下的对策（当然，它同最初的对策比较可能没有变化，因为在这对策中没有出现任何优势）便保持着具有本身特性的2×2对策；它的解答同时也就是2×m对策的解答。怎样寻找这种临界的2×2对策的理论是异常简单的，同时它的实际应用也可能是数不胜数——只需找到这种对策就行。

在这种情况下，我们只得（从2×m的对策支付表中）取出某一种2×2对策，解决它，并且用这个解答来代替最初的对策。假如一个有两种策略的局中人的混合策略适宜于对抗另

一个有许多种策略的局中人所使用的任何一种策略，那么其解答也就被找到了。“适宜”，就是意味着，当一个有两种策略的局中人在同另一个局中人的每种策略对抗时，他的收入至少（但通常会多些）会象他同仍然留在仔细挑选出来的（经过简化的）2×2对策里的两种策略对抗时那么多。

让我们来解释一下后一种情形。在一个要求混合策略的2×2对策里，我们发现：一位采用正确的混合策略的局中人在对抗另一位局中人的两种纯策略之中任何一种策略时，他的收入总是一样的。我们当时就预先指出：这是不太好的，但随后事情有可能改善。现在就已经到改善的时候了。在2×m对策中，局中人之一在同对手的已包括在最优混合策略中的任何一种纯策略对抗时，收入（对策的得失）仍旧那么多；但是，他在同对手的任一种余下的纯策略对抗时，收入就较多。也有例外，那是在收入都相同和在对抗若干或者全部留下的策略之时，然而一般说局中人收入会多一些。

我们举个例子帮助说明：

红者

		1	2	3	4	行的极小值
蓝者	1	1	7	0	3	0*
	2	4	8	-1	6	-1
列的极大值		4	8	0*	6	

这里极小值和极大值相同（零），即对策具有鞍点。

这是一种廉洁的对策；因为它的得失等于零。较优的策略是蓝者－1对抗红者－3。

再举出另一个例子：

红者

		1	2	3	4	5	6	7	行的极小值
蓝者	1	－6	－1	1	4	7	4	3	－6
	2	7	－2	6	3	－2	－5	7	－5*
列的极大值		7	－1*	6	4	7	4	7	

在这里，最大数等于－5，最小数等于－1，所以没有鞍点。然而红者－3，红者－4，红者－5和红者－7的策略都比红者－2占优势，它们获得的结果（对蓝者）较劣；因此这些策略全要勾销，于是对策可以化为以下的支付表：

红者

		1	2	6
蓝者	1	－6	－1	4
	2	7	－2	－5

我们必须在其中寻找出这样的2×2对策，使它的解既能满足2×3对策，随后又能自然而然地满足最初的2×7对策。

我们从前头的2×2对策开始：

红者

		1	2
蓝者	1	－6	－1
	2	7	－2

我们用试验过的方法替它求出了蓝者的9:5的解和红者的1:13的解。

对策的得失将为：

$$\frac{9\times(-6)+5\times7}{9+5}=-\frac{19}{14},$$

如果蓝者以9:5的相对频数同红者－1的策略对抗的话。当然，在同红者－2策略对抗时，其得失也一样：

$$\frac{9\times(-1)+5\times(-2)}{9+5}=-\frac{19}{14}。$$

对求出的解真正的考验是在我们检定蓝者以9:5的混合策略对抗红者余下的（红者－6）策略时才开始。其结果必须比－19/14多些，或者是等于这个数。这个结果是永远可靠的，因为如果求出的解是错误的，那么这情况给你带来的懊丧就太深切了。蓝者的最优混合策略（9:5），应用于对抗红者－6策略时，提供给蓝者的是

$$\frac{9\times4+5\times(-5)}{9+5}=\frac{11}{14},$$

这毫无疑问比－19/14大。所以，蓝者的最优策略是9:5的混合策略，红者的最优策略是1:13:0:0:0:0:0的混合策略。在我们举出的这个例子中，从2×2对策的头一次试验就看得出它是正确无误的。很显然，现实生活不会永远这么美好。假定我们无法按优势的原则删掉若干策略，那么，在这种情况下就会有

$\frac{7\times6}{2}$个2×2对策，我们在寻求到正确的解之前就不得不试验21个对策。一般来说，在2×m对策中包含有$\frac{m(m-1)}{2}$个2×2类型的对策。

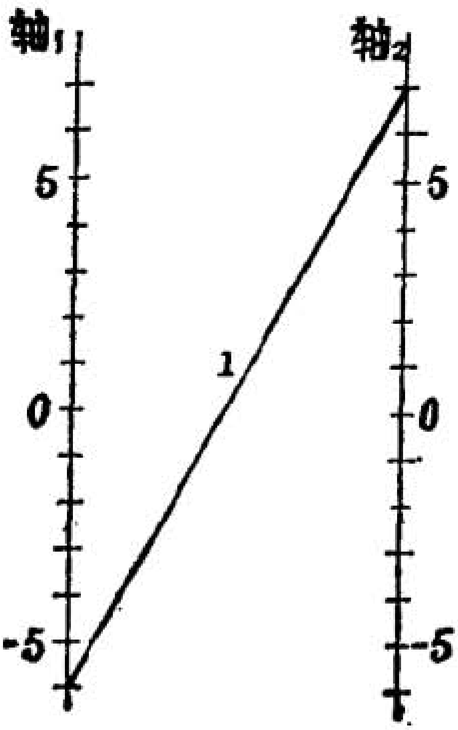
图 解 法

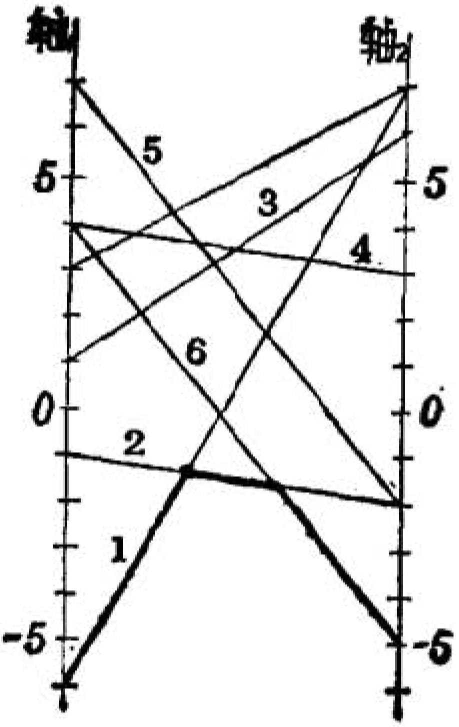
尽管我们不希望以专门的方法使你受累，但为着活跃一下2×m对策的解法，却仍不得不引进其中的一种。我们之所以想尽早这样做，是为了使你明白这些方法在研究更复杂的对策时对于我们将特别有用。我们就用最后的那个例子，即

红 者

		1	2	3	4	5	6	7
蓝者	1	−6	−1	1	4	7	4	3
	2	7	−2	6	3	−2	−5	7

我们将红者第一个策略的支付值（−6和7）标记在两条平行的垂直轴线上，并用直线将这些点连接起来，如左图所示。再在同一图形上，把红者的其余全部策略做同样处理，如右图所示：





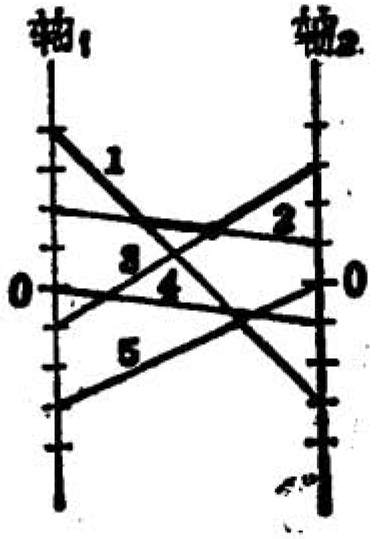
结果虽然稍微复杂些，但却是极有用的！现在我们沿着所得几何图形的下限（界）画一条粗线，然后再找到并标出这粗线的最高点。在这点上相交的线就符合于红者在其混合策略中应该采用的那些纯策略。

在我们这个图形中，在这一点相交的是线 1 和线 2，因此红者的混合策略必须建立在采用红者 - 1 和红者 - 2 策略的基础上。这正同早先获得的结果相一致。这种积极策略一经发现，那么接下去就不难根据由此得到的 2 × 2 对策来确定最初的 2 × m对策中蓝者和红者的最优策略。请你注意：这个简单的图形使得我们能够很快地（当然，得费点时间去找把尺）从二十一个 2 × 2 对策中确定出主要的对策。

假使你遇到是蓝者拥有许多策略的m × 2对策，那么确定蓝者主要策略的图解法同刚才描述的十分相象：在图形的上限（界）画粗黑线，并标出这个限（界）的最低点。通过这点的线指出的就是蓝者的临界策略。

让我们绘出对策的图形

		红者 1	红者 2
蓝者	1	4	−3
	2	2	1
	3	−1	3
	4	0	−1
	5	−3	0



由图形可见，蓝者的混合策略必须以蓝者－2和蓝者－3的纯策略为基础。

现在到了引证若干例子的时候了。

例十一　文 字 游 戏

戈德森和凯普肖天生嗜好搞文字游戏。凯普肖期望获得经济上的收益，他建议最后按以下的要点来组词："假定你从字母a和i中选择，而我不管你怎样，将从字母f、t或x中挑出一个来。如果两个字母能组成某个词语，那我将付给你一美元。此外，如果这个词是名词或代词的话，那就还有共计为三美元的补充奖赏。而在字母不能组成词的难得情况下，你要付给我两美元。"

"在我尚未仔细研究过其中包括有对策论方法的整个情势的时候，我是从来不接受这类玩艺儿的。"戈德森回答说，"请你稍等一等……"

紧接着，他编成一个支付表①

		凯普肖 f	凯普肖 t	凯普肖 x	行的极小值
戈德森	a	－2	1	4	－2*
戈德森	i	1	4	－2	－2*
列的极大值		1*	4	4	

并检验其鞍点。由于行的极小值的最大数（－2）不等于列的极大值的最小数（1），因此支付表中没有鞍点。在寻找混合策略前，他发觉凯普肖策略-f从属于策略-t，即对凯普

①在支付表中所组成的英文单词是：at（在…时候），ax（斧头），if(假如），it（它）。——俄译者注。

肖来说，字母t按元素相比较字母f为劣。因此，预测凯普肖不会采用字母t这一点是正确的。

支付表由此而成为：

		凯普肖 f	凯普肖 x	戈德森的相对频数
戈德森	a	−2	4	3
	i	1	−2	6
凯普肖的相对频数		6	3	

由此可见，戈德森应该以3:6(或1:2)的比例任意选择a和i。而提出对策的凯普肖明白：他应该以 6:0:3 的相对频数来选择f、t或x，也就是说他应该以两倍于 x 的程度更多地说f，同时完全不说t。

然而，戈德森仍旧拿不定主意：他到底该不该玩这场游戏？

“再等一会儿。我来算算对策的得失，老头，”他低声嘟哝道：“现在请看，当他说 f 时，我平均收入大约 $\frac{1\times(-2)+2\times1}{1+2}=0$。这(收入)很少，但并非难以接受。当他说t时，我收入$\frac{1\times1+2\times4}{1+2}=3$ 美元。这已经不坏了……当他说 x 时，我收入$\frac{1\times4+2\times(-2)}{3}=0$ 。嗯……这看来是格外公道的游戏啦。你真叫我不胜惊诧。我们玩吧？”

例十二　比赛的招数①

驻在近东的两位美国飞行员（姑隐其真名，就称为乔和

① 本列在翻译中对某些说法已稍作更动。——俄译者注。

比尔吧）由于百无聊赖，便在军官俱乐部搞到了付赌具箱。箱内放有几盒“波莫”牌香烟、一支左轮手枪、一发子弹和俄式轮盘赌的规则。为要消磨时光，他们想出了一种游戏并决定来赌博。在每局开始时，每个人摆出一盒香烟。名叫乔的年长的一个先轮到。他可以在赌本上添两盒并把左轮手枪传递给比尔，或者是添一盒，转动一下鼓形轮，再把手枪紧挨着自己的太阳穴扣一下板机——那就听天由命啦！——此后，就把手枪交给自己的对手。当比尔接到左轮手枪后，他也有二者择一的机会：当然，他可以往赌本上添两盒，并把手枪递还给乔，或者是只添一盒并用左轮手枪试试自己的运气如何。至此，一局赌博便告终结。每个人可得到一半赌注，当然，这是说如果两个人都还活着的话。在相反的情况下，则活下来的那个人囊括全部赌注。

乔有两种策略：1)认输，2)赌博。比尔有四种策略：1)不管乔怎样决定，他可以认输，或是2)同样不顾乔的决定而赌博，或是3)他可以重复对手所做的事，或是4)他可以反乔

之道而行之。

构成这个对策的支付表是十分简单的，为了不使读者厌烦，我们建议把对它的检验作为练习。（这真滑头①！）

这就是支付表②：

乔

		1	2	行的极小值
比尔	1	0	-1/12	-1/12
	2	1/12	1/18	1/18*
	3	0	1/18	0
	4	1/12	-1/12	-1/12
列的极大值		1/12	1/18*	

① 你也许会把这看做是欺骗，因为我们曾经保证过只限于初等算术范围内，而现在已不止一次冒出一些较严肃的内容，比如说概率论。确实，本书是建立于内容十分丰富的数学基础之上的。甚至连那些我们同你泰然自若地谈过的内容也不言而喻地曾经在极专业化的杂志上经过了周详的讨论。而刊登在这些杂志上的论文并不是任何懂得英文的人都能看懂的。（而想弄明白）我们藉以从现实世界过渡到矩阵对策（对策的支付表）的抽象和模化的过程也许要求你对所研究问题的实质具有高深的理解，对数学领域有更广博的知识和更多的机敏。这有时会迫使你不得不坐个通宵。我们努力用下述办法解决这个问题：研究对策论的各个方面，并规定出纯算术的法则来。只要可能做到，对对策的物理方面和矩阵（支付表）仅仅以简单的论证来加以阐述。否则，我们便悄悄地利用我们所需要的资料，把尽善尽美的结果——现成的矩阵（支付表）介绍给你。——作者原注。

② 支付表的构成确实是一种良好的练习。它需要概率论的初步知识。读者在尝试着独立地做完这件工作后，可以根据如下的推论核对一下自己的结果。

在（施密特和本森型式的）左轮手枪中的6个弹槽中只有一颗子弹。在意外情况下打响的概率为1/6，而不响的概率为5/6。让我们计算出支付表的元素。一盒香烟等于一个单位。

乔—1对比尔—1（两人都不开枪）的方格。两人各拿出了3盒香烟（一盒是赌博开始时拿出的，另两盒是打赌中拿出的），所以，赌注共有6盒，这些香烟被均分成两半，又回到赌徒手中。每个局中人扣除掉赌本外的纯赢利为：$3-3=0$。（接下页注释）

我们这个对策充其量不过是又一个2×m对策的简单例子而已，因为它有一个特点：在局中人做出决定时，他们都有关于先头发生过的情况的完整的通报。数学分析表明：*在任何具备完备的通报的对策中都存在着鞍点。*因此，我们这个对策存在着鞍点，就不足为怪了。这种对策有时也有良好的混合策略的解。

象棋是有完备的通报的对策的另一个实例。在象棋比赛中总存在一种纯策略，能获致至少不次于任何一种混合策略的结局。现在我们还不知道这种带鞍点的纯策略。准确地说，我们是不了解这种纯策略是对白方或黑方有利，或者是达成和局的，原因就在于分析这种对策太复杂太费力气了。甚至就连简单地列举出全部策略也是完全不可能的，因为它包含的近似数目比你一生中所能写下的零的数目更多。假如你知

乔—2对比尔—1（乔开枪，比尔不开枪）的方格。比尔拿出3盒，乔拿2盒，赌注共5盒。假如乔被打死（概率为1/6），则比尔获得5；假如乔没死（概率为5/6），则比尔获得5/2，扣除自己赌本外，比尔的期待收入为

$$\frac{1}{6}\times 5+\frac{5}{6}\times\frac{5}{2}-3=-\frac{1}{12}$$

乔—1对比尔—2（乔不开枪，比尔开枪）的方格。赌注5盒。假使比尔被打死（概率为1/6），他就什么也捞不到手了（乔囊括全部）。假使他没死（概率为5/6），则他获得5/2。扣除自己赌本外，比尔的期待收入为：

$$\frac{1}{6}\times 0+\frac{5}{6}\times\frac{5}{2}-2=\frac{1}{12}$$

乔—2对比尔—2（两人都开枪）的方格。赌本4盒。假使乔被打死（概率为1/6），则比尔获得4。假使乔没死（概率为5/6），则比尔被打死和没死的可能存在。在第一种情况［由两种独立的情况构成的复杂事件——乔没死，比尔被打死（概率为5/6×1/6）］下，比尔一无所得。在第二种情况下（概率为5/6×5/6），比尔获得2。扣除自己赌本外，比尔的期待收入为：

$$\frac{1}{6}\times 4+\frac{5}{6}\times(\frac{1}{6}\times 0+\frac{5}{6}\times 2)-2=\frac{1}{18}$$

其余的方格重复列举过的内容，而支付表其余部分的差异仅在于方格的相互位置而已。

我们发现，作者在支付表中顾及的仅仅是香烟的盒数。显然，符合于“美国生活方式”的生活竟然使得飞行员志趣如此庸俗卑微，就连香烟的价值也能占了优势。——俄译者注。

道了解，那末再下象棋就兴味索然了。

桥牌与扑克牌在今天也同样是不受精确分析摆布的对策，它们都不是有完备的情报的对策。随机过程的开端——分牌——也只是在和局时部分地被对策的局中人所知道。在这里，好的策略毫无疑问地必须由混合策略组成。

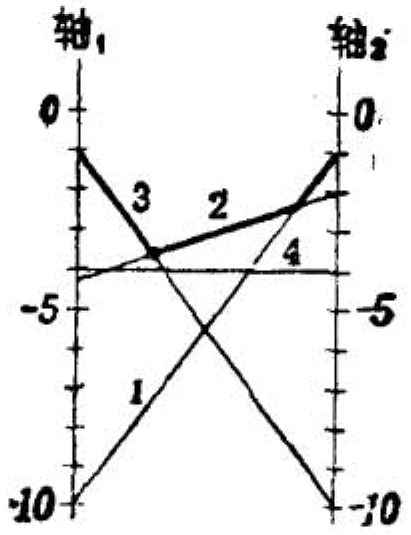
例十三 优质电唱机

甘尼格和卡普列尔商行生产一种供复制10,000赫兹以上音响使用的优质放大器。他们的成品好坏跟一种稀缺的小电容器的参数关系非常大。对商行说来，这种电容器正常造价是1美元，而它在替换顾客损坏的电容器时，却要耗费10美元。

商行解决这问题在某种程度上是二者择一的：第一，他们知道一种有四分之三的机会保证查出不合格电容器的检验方法，遗憾的是，用这种方法得花上1美元。第二，他们还知道另一种极可靠而又很省钱的检验方法，然而这种方法有十分之九的可能击穿一个没有毛病的电容器。最后，商行还可以花4美元购进一个优质的有充分保证的电容器。商行的难题在于从这些可能性中做出正确的抉择。它可以归结成解决下述的一个4×2对策：

		电容器的质量	
		次品	正品
商行	1.不检验	−10	−1
	2.花一美元检验	−17/4	−2
	3.可靠的检验法	−1	−10
	4.有保证的电容器	−4	−4

借助于图解法或是检验法（假如你比较喜欢这个说法的话），我们发现第二、第三种策略是积极的策略。为此，我们计算出它们的相对频数：



		质量		
		次品	正品	商行的相对频数
商行	2	−17/4	−2	9
	3	−1	−10	2¼

采用第二、第三种策略的频率比例为9∶2¼或4∶1。所以最初的对策的混合策略的比例为：0∶4∶1∶0。换言之，商行每次检验电容器时，都必须借助于抛签或是选花1美元的检验法或是选可靠的方法，同时运用前者的次数应是四倍于后者。这样一来，商行应将全部电容器进行检验，而不应花每个4美元的价钱去购进有保证的电容器。

对策的得失等于：

$$\frac{4\times(-2)+1\times(-10)}{4+1}=-3.60(\text{美元})$$

如果自然不发慈悲的话，这便是一个电容器的平均价格了。

抛签法（随机机械论）

你可能产生一个疑问：究竟在哪儿能找到一种随机机械，提供出在混合策略里必不可少的相对频数。在相对频数为1：1的情况下，可以采用抛掷硬币的方法。在频数为1：5、2：4等等，直至5：1的情况下，掷骰子有帮助作用。一副纸牌也能讨论频率1：12（如全部爱司对非爱司）、3：10（如J、Q、K对其它花点牌）等等。钟表上的秒针用于选择从0到59的随机数也非常妙，条件仅仅是你前一阵子没有去看钟表，事先甚至连大概的数字也不知道。然而，在实践中往往要求有任意数的配合做相对频数，所以我们必须有一种获得相对频数的一般方法。为此，在这部分我们将简短地谈点题外话。

随机数表就是能够满足上述要求的随机机械。下面提供一份例表

35	07	53	39	49
56	62	33	44	42
36	40	98	32	32
57	62	05	26	06
07	39	93	74	08
68	98	00	53	39
14	45	40	45	04
07	48	18	38	28
27	49	99	87	48
35	90	29	13	86

这数字两个两个地分成组，除了方便阅读的目的之外，没有其它任何意义。你可以从这类大表的任意一点开始，往上或往下，向左或向右，数出数字，每三次或更多次后把数字合

并起来。这永远只有同样的效果：毫无意义，出人意外和偶然性。尽管这些数字看来是没头没脑的、毫无意义的，但是为了获得这些数码字，可是耗费了巨大的脑力劳动的。（我们引用的表只是藉助特殊的电子轮盘获得的由成百万个随机数所构成的表格的一个部分而已。在附录中引用了这个数表不大的部分。）

如果你以为凭自己的聪明可以写出随机序列数，那就错了。习惯、偏见、嗜好、次序等等——所有这一切都阻碍这些数成为确确实实的随机数。其实，假使逼一个白痴（在这个词的绝对医学的涵义上）写数，你倒有可能获得极好的结果。

如何使用这些数表，才能得到所期望的相对频数呢？我们举某个对策的第一、二种纯策略的相对频数5∶2为例说明。为要找到你阅读随机数表的起始点，你就用手指在表上乱点几次，确定出页、行、列的数码；现在请查到这页、行和数。假定你查得第一页第八行的第十个数。如果这个数等于0、1、2、3或者4，那么请采用第一种策略进行对策。如果这个数等于5或者6，那么请采用第二种策略。如果这个数等于7、8或者9，那么就请放弃该数而改取它以上或以下的数——但这要事先决定下来，并用这个数确定策略。对下一局对策来说，你可选取已利用过的数的下面那个数，并且按照前面那样做法：当该数等于0、1、2、3或者4时，采取第一种策略；当该数等于5或者6时，采取第二种策略；当该数等于7、8或者9时，便转换到另外一行（按原先规定的条件，往上或者往下）。类似地，假如对策的相对频数等于85∶9，那么请重新确定数的最初偶。如果该偶是在从00到84范围内的数，那么请采用第一种策略。如果该偶处于从85到93范围内，那么就采用第二种策略。如果

它在从94到99范围内，那么就放弃它，并取下一个偶。

有时最好把这个方法稍微改改样。比方说，在相对频数7∶4的场合，该数总和为11，你不得不使用包括在00到99范围内的两位数。然而，在这情况下，你必须抛弃从11到99的全部数，因此你是徒劳无功的。在这儿可以这样做：把最大的两位数（即99）除以相对频数的总和（即11）。在本例中答案等于9。一般情况下，这得数是带分数。现在把相对频数乘以这个数(即乘以9)。这得出：7×9＝63和4×9＝36。获得的数为确定相对频数提供了良好的基础。现在，当你遇上从00到62范围内的数时，就使用第一种策略；碰着从63到98范围的数，就使用第二种策略。99这个数，你要把它抛到一边去。

关于2×m对策解法的结论

在留下你单独去完成练习题之前，我们要把解答2×m对策的技巧做个概述。为此，让我们研究对策：

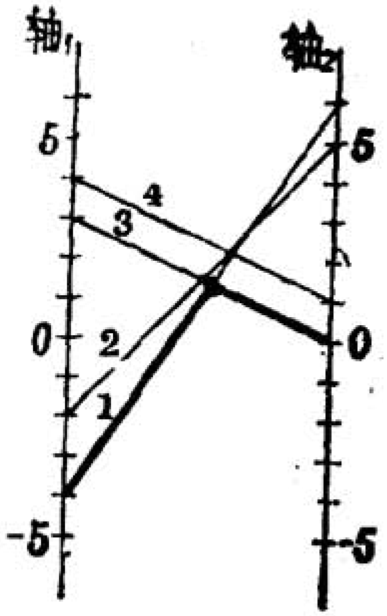
红者

		1	2	3	4
蓝者	1	－4	－2	3	4
	2	6	5	0	1

这里没有鞍点吗？考察支付表的极大值和极小值：

红者

		1	2	3	4	行的极小值
蓝者	1	－4	－2	3	4	－4
	2	6	5	0	1	0*
列的极大值		6	5	3*	4	



它们相应等于0和3，没有鞍点。

我们发现，按元素对比，红者－4策略比红者－3策略劣。因此，我们可以立刻排除它。然而，我们希望用图解法找出一双积极的策略，同时能使红者－4策略自动被消去。我们将红者的四种策略全都标在图形上。

下限的最高点位于红者－1策略和红者－3策略的交点上。它们是积极策略。简化的对策为：

红者

		1	3
蓝者	1	－4	3
	2	6	0

对策中没有鞍点。因此我们来计算混合策略。对蓝者来说，相对频数根据支付表：

蓝者	1	-7
	2	6

而对红者来说，则根据支付表：

红者

1	2
-10	3

这样，对蓝者来说，最优混合策略要根据相对频数6 ：7；而对红者则根据相对频数3 ：10。回到最初的2 × 4对策来，我们看出蓝者的最优策略必须是6 ：7，而红者的最优策略则必须是3 ：0 ：10：0。

用蓝者的6 ：7策略对抗包括在红者混合策略之列的任何一种纯策略，即对抗红者－1或是红者－3策略，便能求出对策的得失。比方说，我们利用红者－1策略就能求出对策的得失等于：

$$\frac{6\times(-4)+7\times6}{6+7}=\frac{18}{13}$$

练 习 二

确定下列对策的相对频数和得失：

1. 红者

		1	2	3
蓝者	1	7	0	3
	2	2	－1	－6

2. 红者

		1	2	3	4
蓝者	1	－2	－6	－5	－1
	2	－3	－7	－6	－2

3. 红者

		1	2	3
蓝者	1	4	0	2
	2	6	7	4

4. 红者

		1	2	3	4	5	6	7	8
蓝者	1	11	18	24	30	24	20	21	23
	2	24	30	24	23	21	17	18	20

5. 红者

		1	2	3	4
蓝者	1	2	2	3	4
	2	4	3	2	2

6. 红者

		1	2	3	4
蓝者	1	10	7	11	0
	2	−8	−2	−9	1

7. 红者

蓝者	1	2	3	4	5
1	5	−2	3	7	0
2	0	5	2	2	6

8. 红者

蓝者	1	2	3	4	5
1	1	−3	5	−7	9
2	−2	4	−6	8	−10

9. 红者

蓝者	1	2	3	4	5
1	−1	3	−5	7	−9
2	2	−4	6	−8	10

10. 红者

蓝者	1	2	3	4	5
1	9	−5	7	1	−3
2	−10	4	−8	−6	2

11.

红者

		1	2	3	4
蓝者	1	8	0	6	7
	2	3	6	3	1

12.

红者

		1	2	3
蓝者	1	4	6	0
	2	3	0	7

13.

红者

		1	2	3	4	5	6
蓝者	1	0	9	8	7	4	2.
	2	10	1	2	3	6	8

14.

红者

		1	2
蓝者	1	1	3
	2	5	7
	3	9	11

15. 红者

蓝者	1	2
1	1	5
2	2	4
3	3	3
4	4	2
5	5	1

16. 红者

蓝者	1	2
1	−1	−3
2	−5	−7
3	−9	−11

17. 红者

蓝者	1	2
1	−2	3
2	3	−2
3	0	0

18. 红者

蓝者	1	2
1	−2	3
2	3	−2
3	1	1

19. 红者

蓝者	1	2
1	−1	5
2	−3	1
3	0	−3
4	−3	0
5	1	−3
6	5	−1

20. 红者

蓝者	1	2
1	9	1
2	7	5
3	8	3
4	5	9
5	6	7

第三章 三种策略的对策

3×3对策

劝谕性的插话

在仅只具备算术水平，对高等数学无穷无尽的丰富知识连轻轻触碰一下都不敢的情况下，却试图讲清如何解象10×10这样大的对策，这真叫人伤透脑筋。我们遭遇到的困难之大，可以比作要教会一个聪明的、然而不识字的儿童用斯潘塞的诗段① 介绍美洲印地安人部族的名称。而且指令他借助于另一个儿童以某种罕见的方言用电话表达。由此类推，可以说要学会解决3×3对策也如同要采用上述方式学会写“猫”字一样。我们期待笔者和读者在解决这个问题时将会共同行动。

在我们着手研究3×3对策之前，把我们已作过探讨的解题技巧做个简短的概述也许是有益的。当你碰到一种冲突的情势，并有若干二者择一的解时，你是如何应用对策论呢？

首先，你列举出对于你以及你的对手都一致公开的全部可能性（逐次的选择）。这时，你应该把受自然干涉制约的偶然事件也考虑在内，如果有可能，还应该核算出来。严格地说，这第一步通常是不可能（做到）的；但如果你仅仅去研究确实具有本质意义的那些可能性，那么这一步就不仅有

---

①I·斯潘塞是十六世纪的英国诗人，他写的诗歌有一种特殊的形式。——俄译者注。

可能做到，而且可以做得足够正确的。正是在这点上，建立数学模型的人的正确判断的艺术和本领经受着最严肃的考验。随便那位傻瓜都能在任意指定的情势中列举出比老天爷能分析得出的更多的因素。比方说，牛顿原本该去留心什么行星的两极稍微有点被压扁啦，某些极地上有山峦啦，至少其中有座山覆盖着树木啦，树上有白蚁啦，以及其余种种使人愉快或不快的东西。要决定列举这些因素到什么地步算适可而止，是需要健全的思维的。事实上，只要健全的思维一向你暗示：模型中列入的因素已足以帮助你了解到至少一点儿关于使你感兴趣的问题的什么情况，那么你就应该终止列举了。

在列举出局中人的策略之后，你必须统计或是评价同蓝者和红者每对策略相关的支付，或是猜度这些支付。有时这些支付值就形成对策的法则。有时你只得借助于概率论或者是逻辑演绎法中的其它什么方法来算出这些支付值。有时（而在现实生活中这是非常经常发生的）你只好全凭自己的正确判断能力来评价或是预测这些支付值。但是在继续行动之前，你必须获得支付值，而且是要获得它们的数字形式。（有关这一方面的实际可能性，请仔细阅读本书以后的若干实例，在从第235页开始的两节中有稍为详细的说明。）

当支付值已知时，就可列出支付表（矩阵），并且你也准备好开始分析。这种分析的目的是什么呢？其目的就在于确定怎样尽可能好地进行该对策以及该对策的得失，即大略计算一下：如果你和对手都正确无误地进行对策时，你怎样才能赢得多或输得少。怎样对策的问题也就等同于以下问题：采用什么样的策略，或者放弃什么样的策略，以利用适当的随机机械（你务必辨明其特性）从其中挑选出那些在每一局中需要加以运用的策略。

我们现在再回到3×3对策来。其中有些容易解，而另一些则不然。每当你遇上一个新的对策时，你都必须用不同的方法逐一试过，支持你的唯有一种坚定的信念，即相信解确实存在。幸亏这些对策之中的大部分都可以化为我们已熟悉的2×2对策。如果不幸那个部分无法归结成2×2对策，那么你就必须记熟在利用这本初级读物的情况下是怎样做的。这样做当然是令人失望的，然而照我们意见来说，这也是必不可免的，因为在这种情况下，简单的规则代替了复杂的数学推论。最终，当你在若干年后学会了开平方时，你想必对这个过程实际上如何进行就没有任何印象了。本书作者无论如何也是打听不到这一点的。只有极少数的汽车司机在内燃发动机方面具有专深的学识。

鞍　　点

要做的头件事是检验对策的鞍点，我们希望它有鞍点。这道手续很简单，也不花多少功夫。比方说，对策可能有以下形式：

		红者 1	红者 2	红者 3
	1	3	0	2
蓝者	2	−4	−1	3
	3	2	−2	−1

浏览一下支付表，找一找每行的极小值，并记下其中最大的一个。用完全相同的方法找一找每列的极大值，并记下其中最小的一个。你便获得：

红者

		1	2	3	行的极小值
蓝者	1	3	0	2	0*
	2	−4	−1	3	−4
	3	2	−2	−1	−2
列的极大值		3	0*	3	

如果象我们这里这样，记下来的两个数字相同，那么你的工作便告终止，因为这些数字已经确定了每个局中人的最优策略。当存在鞍点时，每个局中人则都应该运用那个和鞍点对应的纯策略。在此例中即为蓝者-1和红者-2策略。再者，标有星号（* ）的那个数字就等于对策的得失。在我们这个例中得失等于零，这就是说，对策对于两位局中人是公平的。请注意：假使每位局中人总是遵循自己的最优策略行事，那么任何一位都不会吃亏；但一旦他偏离正确的途径，他立即就要遭受损失。

优　　势

现在，让我们研究下面的对策：

红者

		1	2	3	行的极小值
蓝者	1	3	0	2	0
	2	4	5	1	1*
	3	2	3	−1	−1
列的极大值		4	5	2*	

这一组的数目字同前一个对策的支付表相比看不出什么优劣，因此我们来试找一找鞍点。各行极小值中的最大数等于1，各列极大值中的最小数等于2。所以我们干的一切都似乎是徒劳无益的。其实，这也并非白费气力，因为这两个数字告诉我们：对策的得失是大于1个单位，同时小于2个单位。

我们检验一下对策是否存在占优势的策略，即研究一下是否不存在那种对蓝者（或者红者）来说是愚蠢的纯策略。

蓝者希望支付值尽量大。因此，按元素比较，蓝者-2策略优于蓝者-3策略。既然如此，何必老是去研究蓝者-3的策略呢？删除它！红者也正是这样，他关心的是使支付值尽量小。看来红者-1策略总是劣于红者-3策略，所以应摒弃它。

经过这些运算之后，结果是给我们留下一个2×2对策，恰正是：

红者

		2	3
蓝者	1	0	2
	2	5	1

我们知道解答的，即：

红者

		2	3	蓝者的相对频数
蓝者	1	0	2	4
	2	5	1	2
红者的相对频数		1	5	

因此，3×3对策的解是：

		红者 1	红者 2	红者 3	蓝者的相对频数
蓝者	1	3	0	2	4
蓝者	2	4	5	1	2
蓝者	3	2	3	−1	0
红者的相对频数		0	1	5	

蓝者应以4∶2∶0的相对频数运用自己的策略，而红者则应以0∶1∶5的相对频数运用其策略。等于零的频率意味着该策略一般是不被使用的。

倘若我们按优势原则只能排除一种策略，那么留下的就不是2×2对策，而是2×3对策。不过，我们已经学会解这种对策了。

现在你已经明白，优势的概念如同鞍点的概念一样，无论是对于 2×m 对策或是3×3对策来说，都是完全一样的。由此可获得如下的结论：假使3×3对策里有鞍点，则最优策略就跟纯策略完全一样。假使没有鞍点，但有从属的行或列（或者两者兼有），则最优策略就是基于两种纯策略的混合策略。

对 策 的 得 失

3×3对策的正常的估计，即（如果对策延续得足够长久，而且进行得很好时）它能担保你获得的得失，同样可以利用曾在2×2对策中用过的自然扩张法求出来：比方说，以蓝者的最优策略混合体对抗红者的属于最优策略混合体中的一种

纯策略，我们便能计算出平均支付值来。照此，蓝者在本例中（对抗红者-2的策略）所得平均值为：

$$\frac{4\times0+2\times5+0\times3}{4+2+0}=\frac{5}{3}.$$

在对抗红者-3策略的情况下，对策的得失也将相同。无论是在对抗蓝者-1策略时，抑或是在对抗蓝者-2策略时，红者的最优混合策略保证红者的损失都等于5/3。

假使有个局中人采用一种自己禁用的策略（如蓝者-3或红者-1策略），则结果将恶化。这样，红者违反法则的结果是给予蓝者

$$\frac{4\times3+2\times4+0\times2}{4+2+0}=\frac{10}{3},$$

而若是蓝者犯规的话，则其支付值成为

$$\frac{0\times2+1\times3+5\times(-1)}{0+1+5}=-\frac{1}{3},$$

即红者得以从实质上对他无效的对策中收入1/3。现在你已经很清楚，我们应付的是这样的对策：一个劣等的局中人在该对策中是不能仅仅考虑到他的对手为了赢得对策的得失而运用其最优策略的，如同在有混合策略的2×2对策中发生过的那样的情况。在复杂的对策中，假如你的策略运用得不合理，而你的对手却很理智，那么他就无论如何也不会买你帐的。恰恰相反，象早就该意料到的那样，你却必须为轻率的对策付出代价。

三种积极策略

到刚才为止，我们所研究过的3×3对策的解，不是拥有一种积极策略（在存在着鞍点的情况下），就是拥有两种积

极策略（在存在优势的情况下）。现在，我们要向你揭开解答拥有三种积极策略的3×3对策的秘密。在采用这种方法之前，一定先得检验对策的鞍点和优势，因为假如存在着鞍点或是优势，我们的方法就无效。这就类似外科方法，它是在任何其它医疗方法都不奏效的时候才采取的最后（医疗）手段。

让我们研究对策

		红者 1	红者 2	红者 3
蓝者	1	6	0	6
蓝者	2	8	−2	0
蓝者	3	4	6	5

检验一下它的鞍点和优势。没有效果！这意味着我们是同一种崭新的规则打交道了。

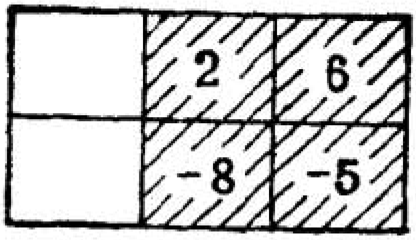
作为开端，我们先只限于研究红者的对策，并确定他运用其策略的频率。（我还记得，你是蓝者，而我们却必须既替蓝者，又替红者进行工作。但我们感觉从红者开始做，稍为容易些。）首先，从上面的行中减去（下面）各行，即从位于上面的支付值中减去（下面）各个支付值，我们把相减的结果记载在新的一组方格内：

红者 1	红者 2	红者 3
-2	2	6
4	-8	-5

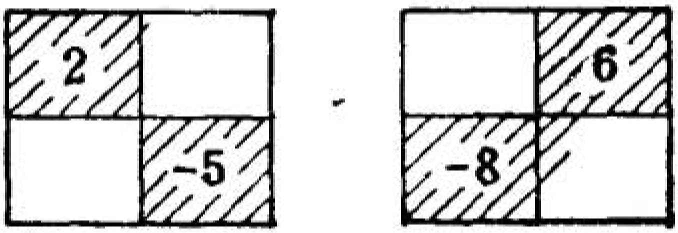
红者-1策略的相对频数取决于在上述矩阵（表）中删除红者-1的列之后仍留在带斜线方格里的数字：

红者

1



频率的数值等于沿对角线各数乘积之间的差数：



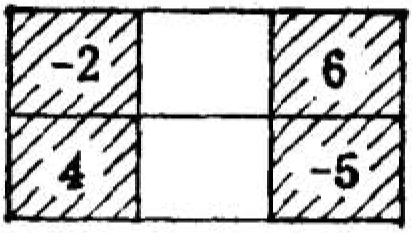
即 $2\times(-5)-6\times(-8)=38$

38这个数字就代表着采用红者－1策略的相对频数。假设它等于－38。我们也不必去理会负号，而仍然把它看作所求的数字38，不过，在你最终计算出相对频数之前，还须认真对待所有的符号。

我们可以用完全相同的方法得出红者－2和红者－3策略的相对频数。我们替红者－2策略从带斜线的矩阵表中删除红者－2的列，结果是获得：

红者

2



从这个矩阵中，我们可以看得出：红者－2策略的相对频数取决于矩阵：

-2	6
4	-5

在沿对角线乘积的差数等于

$$(-2)\times(-5)-4\times6=-14,$$

所以红者－2的策略的相对频数就等于14。通过类似的过程，我们求出红者－3策略的相对频数等于8。将这些结果合并，我们便可获知：红者的最优混合策略必须依从于38∶14∶8的相对频数。

我们用类似的方法也能找到蓝者的最优混合策略，只是，以列替换行进行研究罢了。我们从前面的列中减去（后面的各列，即从左边的支付值中减去（右边的）各个支付值，得到矩阵表

	1	6	-6
蓝者	2	10	-2
	3	-2	1

从矩阵中求出蓝者－1策略的相对频数

	1		
蓝者		10	-2
		-2	1

得出其值 $10\times1-(-2)\times(-2)=6$。我们用完全相同的方法求得蓝者－2和蓝者－3策略的相对频数是6和48。因此，蓝者最优混合策略就是6:6:48。

这样一来，现在我们就有了（正如我们所期望的①）所求的解答，它正是：

		红者 1	红者 2	红者 3	蓝者的相对频数
蓝者	1	6	0	6	6
蓝者	2	8	−2	0	6
蓝者	3	4	6	5	48
红者的相对频数		38	14	8	

对两组相对频数可以用公因子进行约分。这样，用公因子6约掉之后，我们获得蓝者的相对频数为1:1:8。与此类似，我们用2约掉红者的，便得到19:7:4的相对频数。

解有三种积极策略的对策的最后阶段，同时也是极为主要的阶段，就是要检验已求出的相对频数。它们是否确实具有正确的解的必不可缺的质量呢？我们记得：一个局中人的最优混合策略必须保证在对抗包括在对手最优混合策略之中的每个纯策略时都有同样的支付值，这也就是说在这种情况下对抗其对手的全部策略。演算很简单。

当蓝者利用1:1:8的混合策略来对抗红者－1策略时，则其平均收入将等于

①这里使用“期望”一语，是因为在演算过程中我们可能出差错。更为严重些的困难情况见于后一节。——作者原注。

$$\frac{1\times6+1\times8+8\times4}{1+1+8}=\frac{23}{5}。$$

在对抗红者－2策略时，其收入同样是：

$$\frac{1\times0+1\times(-2)+8\times6}{1+1+8}=\frac{23}{5}$$

在对抗红者－3策略时，收入为

$$\frac{1\times6+1\times0+8\times5}{1+1+8}=\frac{23}{5}$$

一直很好。现在让我们检验红者利用19:7:4的混合策略对抗蓝者－1策略的情况。红者损失

$$\frac{19\times6+7\times0+4\times6}{19+7+4}=\frac{23}{5},$$

在跟蓝者－2和蓝者－3对抗时，其损失也相同。

这样一来，我们就解出了对策；它的得失等于$\frac{23}{5}$或者说$4\frac{3}{5}$。我们相信确实求出了正确的解，因为在各个局中人的混合策略同另一个局中人的包含在最优混合策略之中的各个纯策略相对抗时，平均支付值都相同。

你最好别遇上的几种策略

偶尔你竟然发现，在遭遇到意外情况时，所有解决3×3对策的灵丹妙药都失灵了。换句话说，在若干对策的支付（矩阵）表里存在着违背我们曾向你建议过的各种通用方法的微妙内容。

我们只举个例子简略谈谈这个问题①。让我们回想一下

①对于这个问题更进一步的阐述你可以在以后章节中见到；参见第226页。——作者原注。

有关优势问题的某些方面。有一些纯策略可能显而易见地劣于其它的策略。因此，不应当使用它们。可是有时会碰上一种纯策略，它劣于其它纯策略的某种恰当的混合体，所以它也同样不应当使用。假使你遇上了其中一种意外情况，那么我们的方法就显得无能为力了。还有其它一些本质上与刚才我们已研究过的情况相类似的伤脑筋的事情，它们都可称为失利。但是，我们总还是能够对付它们的。

在利用3×3对策的解法时，可能的失利永远是同存在禁用的策略有关联的。由于某些原因，有时这个或那个模糊的纯策略必须摒除掉。这就是我们在类似情况下解决问题的方法的基础，当然，这种方法是很笨拙的，但却是可靠的。

消去某一个（任意的）策略，然后求出余下的对策的解。此后把它代入初始的对策中，以检验求出的解。如果它适合，那么你就达到自己的目的了。如果它不适合，那你就试一试消去另外的某一个策略。重新求出余下的对策的解，并把解代入初始的对策中。或迟或早，这总会成功的。

现在，让我们来研究下面的对策：

红者

		1	2	3
	1	6	0	3
蓝者	2	8	-2	3
	3	4	6	5

这对策看上去什么也不比上一个例子差。真的，只有两个数字改变了。我们的处理（步骤）也和通常一样，验证在对策中既无鞍点又无优势。那么，我们就开始解有三种积极

策略的对策的程序（这在上面一节中已经叙述过），而且求出蓝者的答案是0:0:0，红者的答案是4:4:8。这是一种讨厌的答案，因为看样子蓝者是不想采用他的任何一种策略。由于我们很想知道：如果蓝者将要对策，他必须如何进行，所以这种答案简直是不可容忍的。不过，我们还算走运，因为立刻就看出这儿什么地方有点毛病。有可能碰到这种意外情况：相对频数（比方说3:7:5）貌似可信，而实际上却是虚假的。这只有在我们用算出的对策的得失来试着检验得到的解时，才有可能发觉。

现在让我们从消去蓝者－1策略开始，试着修正。这使我们获得下面的对策：

		红者 1	红者 2	红者 3
蓝者	2	8	-2	3
	3	4	6	5

我们替这个刚得到的2×3对策寻求2×2类型的对策的解。从对策

		红者 1	红者 2
蓝者	2	8	-2
	3	4	6

开始。我们求出简化的对策的解

红者

		1	2	3	蓝者的相对频数
蓝者	2	8	-2	3	2
	3	4	6	5	10
红者的相对频数		8	4	0	

将频率用公因子约分后，把这个解代入初始的对策：

红者

		1	2	3	蓝者的相对频数
	1	6	0	3	0
蓝者	2	8	-2	3	1
	3	4	6	5	5
红者的相对频数		2	1	0	

这是解吗？为了回答这个问题，让我们来计算对策的得失。假定蓝者对抗红者－1的策略：

$$\frac{0\times6+1\times8+5\times4}{0+1+5}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$$

在同红者－2和红者－3策略对抗时，得失仍旧是这样的。（假使蓝者在同红者－3策略对抗时，收入大于$4\frac{2}{3}$，那也没有可惊讶的。不过，在我们这个例子中并没有发生这样的情况。）

另一方面，红者在同蓝者－1策略对策时，损失（支出）

$$\frac{2\times6+1\times0+0\times3}{2+1}=4。$$

这是完全可以理解的。因为假如蓝者使用了一个不在其最优混合策略之列的策略，那么红者就将取得较好的结果，即他的支出小于对策的得失。当红者对抗蓝者－2和蓝者－3的策略时，他的支出恰正是$4\frac{2}{3}$。

这样，我们就获得了对策的解。在对手使用在其最优混合策略之列的纯策略时，各个局中人只要遵循计算出的混合策略（对蓝者来说是0:1:5，而对红者来说则是2:1:0）对策，那就保证有等于$4\frac{2}{3}$的平均支付值。而当对手使用摒弃的策略时，其支付值至少不劣于此结果。遗憾的是，虽然问题本身非常简单，但是这些解释却占用了很多的时间。这样，倘若你仍然跟得上我们的步子，那么借用一下本章开头的比拟，就可以说你已经克服了通讯系统的极端的困难，学会写“猫”字了。

在这里，我们也许应该研究一个不时暴露出来的问题。一个良好的对策，也就是说运用最优混合策略，（比方说是指蓝者运用着吧，）有时对双方局中人来说就是获得对策的得失的保证。这是由于红者所能运用来对抗蓝者的最优混合策略的众多的对策方法，如同其最优混合策略一样，所给出的结果也是相同的。不过这种保证成功的手段，也仅仅是对于蓝者，即采取最优混合策略的局中人来说，才是靠得住的。只有在红者的最优混合策略（我们假定他没有利用之）包括着全部纯策略时，红者才能有利地对抗蓝者的最优混合策略。也只有在这时候，红者才能不受惩罚地使用任意的纯

策略（不管它是怎样的），以对抗蓝者的最优纯策略。但是，假如有若干纯策略已被排除出红者的最优混合策略，则红者就不敢用那一种违禁的策略来对抗蓝者的最优混合体。

因此，运用混合策略并不意味着对手可以有避免他自己方面不必要的损失的自动而充分的保险。它宁愿自动而充分地保障你避免各种场合中来自你自己方面的不必要的捐助。作为对此的补充，在对手掌握着坏的策略并且加以使用的场合，它还能迫使他不得不遭受损失。但很遗憾，它却不能担保这些罚金一定会是最大值。

例十四　“石头——纸——剪刀”游戏

在对策论发展的最初阶段曾经分析过的一种对策乃是叫做“石头、纸和剪刀”的儿童游戏①，它的解法凭直觉就是显而易见的；但用预先已知的结果来核对一下方法也很有趣味。

两个局中人同时说出（或者是用手势表明）三种东西之中的一种。如果两人说出同一种东西，则该局为平局。在产生对抗的情况下，支付由以下条件确定：剪刀剪破纸张，石头砸坏剪刀，而纸张则遮盖石头。这个对策的支付表因而将是：

		红者		
		剪刀	纸	石头
蓝者	剪刀	0	1	−1
	纸	−1	0	1
	石头	1	−1	0

①我的那些孜孜不倦的谋士们立刻提示出一种中国式的类似游戏：人能吃鸡，鸡能啄虫，虫能咬人。——作者原注。

在这里既没有鞍点，也没有占优势的策略。红者的混合策略我们可由矩阵

红者

剪刀	纸	石头
1	1	-2
-2	1	1

求出。从上面的一行中减去（下面的）各行的数，其结果便是这个矩阵。剪刀的相对频数是根据矩阵

红者

剪刀		
	1	-2
	1	1

算得，即为 $1\times1-1\times(-2)=3$。

红者－纸的策略可以利用矩阵

红者

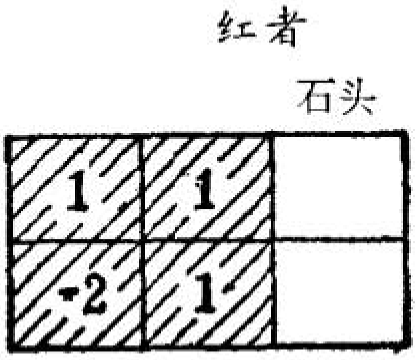
	纸	
1		-2
-2		1

即为

1	-2
-2	1

得到　　$1\times1-(-2)\times(-2)=-3$。

至于红者-石头的策略，则利用矩阵



可得　　$1\times1-1\times(-2)=3$。

由于对策的对称性，所以对蓝者来说，结果也是相同的。因此，全体局中人都必须以相同的频率，即1：1：1来行使自己的全部纯策略。（因为我们的方法有可能不灵，所以我们永远应该检验所获的结果。）

例十五　燃料问题

在一个炎热的夏夜里，储煤过冬的问题困扰着甘斯。在正常的冬季，他的住宅内需要烧大约15吨煤，但也有些年份只烧了大约10吨，还有一些年份，甚至要烧20吨。他也想到了煤价是依气候而波动的，在温和的、正常的、严寒的冬季

分别相当于每吨10美元、15美元、20美元。但在当时，他可以按每吨煤10美元的价格购买。

怎么办？他现在是应该把过冬用煤全都买下来，或者是只买一部分呢？也许他春天便要启程去加利福尼亚，又不可能把剩余的煤随身带走。他研究了所有的长期天气预测，甚至研究了来源于动物的预测。①

他研究了三种纯策略，亦即：在现在购买10吨、15吨或20吨，而其余的（如果还需要的话）则晚些再买。各种选择的价钱归结在下面的支付表中：

		冬季 温和	正常	严寒	行的极小值
储煤吨数	10	-100	-175	-300	-300
	15	-150	-150	-250	-250
	20	-200	-200	-200	-200*
列的极大值		-100	-150	-200*	

在这个对策中有鞍点。它对应于储煤20吨。（假使甘斯拥有哪怕不多的气象逻辑情报，他就能由此获益。在本章往下的部份，我们将返回到类似的情势。见例二十“同病人打交道的本领”。）

例十六　继　承　人

乔治获得了一笔遗产，他必须向国家缴纳数目为十万美

① 手稿的批评者们所允许给作者的诗一般的自由程度，可以从如下的评论中得到佐证：“动物们在夏天的夜晚，尤其是在炎热的夜晚，是不能进行天气预测的。”——作者原注。

元的遗产税。然而，他有权在一年的期限内缴纳这笔税款。自然，他决定拖到年终缴款，以便把大笔钱拿去投资，尽可能多获得些利润。他因为对《新兴》商行的能力有怀疑，便向该行提出要求，请他们把相应的事实和数字指标向自己作个介绍。商行向他提供了有关他在不同部门投资所能获取的利润的核算表。其利润大小取决于商行无法预料的政治环境：

	场合 战争	冷战	和平
证券	2900	3000	3200
军火生产	18000	6000	−2000
商业	2000	7000	12000

不知怎么的，乔治猜到了这是一场他跟自然之间的对策。他是一个对最大限度的利润感兴趣的局中人，而自然在它有兴趣的范围内关心的却是使他只获得最低限度的利润。

对策中既没有鞍点，也没有优势。因此，我们用解 3 × 3 对策的一般方法试试，但获得的却是一个毫无意义的结果，即相对频数。而它并不能作为我们所要求的正确解的评定标准。因此，我们转向 2 × 2 对策，经过若干寻求之后，现在我们来试验这个矩阵（表）：

	战争	冷战
军火生产	18000	6000
商业	2000	7000

它为乔治的策略提供了 5 ∶ 12的相对频数，为自然的策略提

供的则是1∶16。这个解对于原来的对策也是适用的，这样，我们便得到：

	战争	冷战	和平	乔治的相对频数
证券	2900	3000	3200	0
军火生产	18000	6000	－2000	5
商业	2000	7000	12000	12
自然的相对频数	1	16	0	

乔治可以按照相对频数抛签或者是把十万美元资本的5/17投入军火生产，并把12/17资本投入商业。对策的得失大约是6700美元。

在这个例子中（在先头若干例子中也如此），我们做出了某些好象是放弃我们自己的法则的事情，而恰恰正是我们准许把相对频数解释为在一局对策中的各种纯策略的自然的混合体。换句话说，我们允许局中人同时采用一种纯策略的一些部份和另一种纯策略的一些部份，而不是仅只利用一种策略，即相应的签向局中人暗示的那种策略。

很显然，在这种情况下，我们违背了某一个原则。否则，自然的混合体本来就不可能有的。任何一种可能采取的行动都必须看成是某一种纯策略，这样是为了让运用自然的混合体的可能性不受怀疑。

这种反常的情势说明存在着某一种无限对策①，它跟上面研究过的有限对策紧密相关。在无限对策中，局中人拥有无数的以有价证券组合的投资方法（我们忽略涉及有价证券

① 即指有无穷多个纯策略的对策（比方说，象在连续的线段上选点）。——俄译者注。

和钱币可能的实际限制的规定）。此外，由每种有价证券得到的部分收入跟它们所购进的数目是成比例的，而完整的收入则等于各个部分的收入的总和。这样的情势或是可以当成有鞍点的无限对策，或是可以当成一般要求采用混合策略的有限对策。在解释最后提到的自然混合体时，我们所获得的解，相当于合乎无限对策的鞍点。

例十七　分配畜产主财产

多尔基和卡普兰打定主意停办自己的畜牧场，因为卡普兰感到自己越来越受排挤。他们以正常的方式卖尽了自己的畜群，只留下三头浑名为达尔兰、达尔康和达尔京的公牛。

分这些牲口可是郑重的事儿，因为它们身价高昂（它们很容易以大约二万，三万和四万美元售出），但是主人们甚至连想都不愿想到让这些牲口落入他人之手。同时，他们中谁也不想向对方付这么多的钱。各人都把占有牲口看作赢利（收入），而把牲口落入伙伴之手看作亏损（付出）。他们要用一些时间来拟定一份对双方都合宜的方案。

最后，他们终于达成了以下的协议：每人都必须从一副纸牌中取出二点、三点和四点的（三张）纸牌，它们必须相应地象征着二万、三万和四万美元的赌注。然后先押上第一头公牛，各人都必须抽出一张象征其赌注的纸牌并翻开来。谁的赌注大，谁就赢得了这头公牛。此后再押上另一头公

牛，赌注也同样是从剩下的纸牌中形成，如此等等。押下的公牛必须取随机顺序。如果谁也没赢，就把牛宰杀了。这些伙伴该怎么进行对策呢？他们应该按什么顺序翻自己的全部纸牌？或者，他们是否应当依靠某种方式来适应当时的情况呢？

分析这类对策是颇为复杂的。因此我们只简略地谈谈。3 × 3 对策的三种策略之中的任何一种都依他们首先牵出的是哪头牲口为转移，这是必须加以分析的。在这些 3 × 3 对策中的各个支付，同时也等于 2 × 2 对策的得失。为使我们能够看到这是怎样搞出来的，让我们假定他们先从值 2 个单位的老公牛达尔兰开始。假定这两人翻开的都是二点的牌。这可怜的畜牲就没命啦，可是他们谁也不认为自己有得失。如果此后跟着来的是公牛达尔康和达尔京，那么可能性将如下：

		多尔基翻的牌点 先三后四	先四后三
卡普兰翻的牌点	先三后四	0 + 0	− 3 + 4
	先四后三	3 − 4	0 + 0

这个对策可以写成如下的形式：

0	1
− 1	0

在它的左上角有个得失等于零的鞍点。假使最后这两头公牛出现的顺序相反，其结果仍不会变。这个零是由同样等于零

的第一步相加的结果，它还将等于达尔兰头一个出场的 3 × 3 对策的左上角的那个支付值：

多尔基先翻开的牌点

卡普兰先翻开的牌点	2	3	4
2	0	-1/7	23/7
3	1/7	0	-1/7
4	-23/7	1/7	0

其余的方格也都是用同样的办法填写好的。这样一来，卡普兰和多尔基就应该按争取获胜的要求来抽选自己的第一张纸牌。这就要求两个局中人以 1 ∶ 23 ∶ 1 的比例使用混合策略。随后抽选的纸牌则指挥着 2 × 2 对策。整个对策的得失全部等于零，即它是一种公平合理的对策。

如果头一个出场的公牛是达尔康，则对策将成为：

多尔基先翻开的牌点

卡普兰先翻开的牌点	2	3	4
2	0	-1	5/3
3	1	0	-1
4	-5/3	1	0

最后，如果头一个被牵出来的是公牛达尔京，则对策将成为下页的形式。这些对策需要相当于 3 ∶ 5 ∶ 3 和 0 ∶ 0 ∶ 1 的混合策略。

这个例子除了为你提供了一个分配畜牲的绝妙方案，并

多尔基先翻开的牌点

卡普兰先翻开的牌点	2	3	4
2	0	-13/5	-1/5
3	13/5	0	-13/5
4	1/5	13/5	0

一定会激起你的各种情绪之外，它的主要意义是在于表明：一个初看是简单的问题分析起来却可能多么复杂。除了那些实际上确乎简单的情势以外，要解决好一个问题一般都需要有机巧的手法（而且大概还得有个强壮的腰脊呢）。

例十八 约 会

大卫和约翰很想约恩见见面。可是没有一个年轻人准确地知道她何时在家。不过，人们已知她在三点钟、四点钟和五点钟回家的概率是相等的。因此，假如是约翰先打来电话，恩就将给大卫一个优待：她会要他等上几分钟，以便使大卫有机会正赶上她在家里。假如这一段时间里大卫没挂电话，那么恩将亲自给约翰打电话并接受他的邀请。他们准备共度的那个夜晚不允许太喧闹，因为每个青年人都只有10美分，这些钱必须花在通过自动电话的交谈上。

可以根据概率论的基本概念编成支付矩阵（表）。比方说，假如大卫在三点钟打电话，而约翰是在五点钟，那么对大卫来说，他同恩会面的概率等于1/3，对约翰来说则是2/3。于是乎，大卫的支付值将是1/3－2/3＝－1/3。一般的矩阵将为

		约翰打电话的时间		
		三点	四点	五点
大卫打电话的时间	三点	1/3	0	-1/3
	四点	0	2/3	1/3
	五点	1/3	-1/3	1

在徒劳无功地寻找过鞍点和优势之后，我们判明了：这是一个拥有三种积极策略的对策。我们用标准化的方法，将全部支付值都乘以3，以简化演算法。这样我们便求得：大卫必须采用的相对频数为2:2:1，而约翰则须用10:4:1。对策的得失等于1/5有利于大卫。

这个对大卫来说是肯定的结果，毫无疑问地是由于恩所给予他的特殊的优待。要想回答出大卫和约翰分别会有多少次约会，以及恩会有多少个夜晚形影孤单这样的问题，是必需费一番功夫的。看来，适用于这个事件的相对频数是97:52:76，这就是说，假如对策重复进行225次，那末事件发生的数目就会跟相对频数一致，即大卫有97次约会，约翰有52次。而恩有76个夜晚只得孑然一身，寂寞独处。请你注意 $\frac{97-52}{225}=\frac{1}{5}$，这就是对我们解的正确性的可以满意的检验。

关于3×3对策解法的结论

在解3×3对策的技巧方面有两个在解2×2对策时不要求的实质上新的要点。这些要点首先是按优势原理的策略消元法，其次是利用程序确定拥有三种积极策略的对策的相对频数。解3×3对策的一般程序都必须如下：

一、检查对策的鞍点。换句话说，就是把各行极小值的最大数同各列极大值的最小数做个对照；如果两者相等，就意味着存在鞍点。

二、当不存在鞍点时，则请利用优势原理尝试降低对策的阶。对蓝者来说，有可能某一行的全部数都小于或等于另一行的数；或许，对红者来说，某一列的数都大于或者等于另一列的数。假如是这样，那就把这个质量不合格的行（或是列）消去，再在剩余的 2 × 3 或3 × 2对策中寻求解。

三、在上述两种办法都不适用时，就利用带斜线的方格技术，即假定全部三种策略都加入解，并试验确定最优混合策略的相对频数。然后，检验得到的结果。

四、如果三种办法全部失败了，那么就假定3 × 3对策的解跟包含在它内部的某一2 × 2对策的解一致。请你把它们逐一试过，直至你的企望获得成功或者直至全部试完为止。

五、假如这四种办法统统不灵，这就意味着你是在什么地方出差错了。这很糟糕！请注意：以下的练习题中就包藏有犯错误的可能性。

练　习　三

确定下述对策的相对频数和得失：

1\. 红者

蓝者 \ 红者	1	2	3
1	1	4	7
2	1	7	4
8	4	7	4

2\. 红者

蓝者 \ 红者	1	2	8
1	1	2	3
2	8	9	4
3	7	6	5

3. 红者

蓝者	1	2	3
1	1	2	1
2	2	7	4
3	1	0	6

4. 红者

蓝者	1	2	3
1	6	−10	3
2	4	4	4
3	7	11	−5

5. 红者

蓝者	1	2	3
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

6. 红者

蓝者	1	2	3
1	−1	1	0
2	0	−1	1
3	1	0	−1

7. 红者

蓝者	1	2	3
1	0	2	1
2	2	0	2
3	1	2	0

8. 红者

蓝者	1	2	3
1	1	1	3
2	1	3	2
3	3	2	2

9. 红者

蓝者	1	2	3
1	3	5	2
2	0	6	8
3	4	1	3

10. 红者

蓝者	1	2	3
1	7	0	−5
2	0	1	4
3	−5	3	6

11. 红者

蓝者	1	2	3
1	0	1	2
2	1	0	1
3	2	1	0

12. 红者

蓝者	1	2	3
1	4	3	2
2	3	4	3
3	2	3	4

13. 红者

蓝者	1	2	3
1	−6	5	0
2	2	1	3
3	1	2	0

14. 红者

蓝者	1	2	3
1	0	4	1
2	−7	2	1
3	6	−5	−1

15. 红者

蓝者	1	2	3
1	−7	4	2
2	0	2	1
3	6	−5	−1

16. 红者

蓝者	1	2	3
1	1	4	7
2	1	7	4
3	5	7	4

17. 红者

蓝者	1	2	3
1	1	3	2
2	0	7	4
3	3	8	4

18. 红者

蓝者	1	2	3
1	3	1	6
2	2	2	0
3	8	0	3

19.

红者

蓝者	1	2	3
1	1	3	5
2	2	4	4
3	6	1	1

20.

红者

蓝者	1	2	3
1	3	1	6
2	2	4	2
3	1	5	4

21.

红者

蓝者	1	2	3
1	6	4	3
2	0	2	8
3	1	6	3

22.

红者

蓝者	1	2	3
1	8	0	7
2	3	3	8
3	3	6	1

23.

红者

蓝者	1	2	3
1	3	0	7
2	4	6	0
3	3	4	3

24.

红者

蓝者	1	2	3
1	203	403	103
2	303	3	103
3	3	103	303

25.

红者

蓝者	1	2	3
1	4	6	0
2	0	3	10
3	3	6	6

26.

红者

蓝者	1	2	3
1	2	4	0
2	1	4	10
3	5	10	4

27.

红者

蓝者	1	2	3
1	5	5	0
2	4	7	8
3	2	2	10

28.

红者

蓝者	1	2	3
1	3	6	0
2	5	3	2
3	2	1	6

29.

红者

蓝者	1	2	3
1	3	5	0
2	4	4	1
3	1	1	6

30.

红者

蓝者	1	2	3
1	3	2	4
2	0	4	1
3	1	3	4

31.

红者

蓝者	1	2	3
1	3	2	4
2	4	3	2
3	2	4	3

$3\times m$对策

解　　法

$3\times m$对策，即一位局中人拥有三种纯策略，而另一位

局中人拥有许多纯策略的对策。这类对策可以采用解3×3对策的方法来解，这正如同采用2×2对策的方法来解2×m对策一样。每个3×m对策必定有一个解，它要么是3×3型对策的，要么是2×2型对策的，再或就是有鞍点。你的任务就在于找到一种适当编组成的3×3对策或是2×2对策，把它解出来并且证明所获得的频数同样也是初始对策的解。

你必须无条件地从检验鞍点着手，因为这很容易做到。假使存在鞍点，而你自己却一无所知，这种局势是不可容忍的。如果没有鞍点，则检验对策的优势，以便把显然不宜的行和列消去。当你用这样的方法成功地消去局中人所拥有的三种策略之一时，你的任务便迅即归结为替2×m对策寻找2×2型对策的解了。

如果3×m对策中没有鞍点，根据优势原理的策略消元法也并不能获得本质上的简化，那么在这种场合，你就只好继续研究下去。你应当观察全部可能的3×3对策或2×2对策，直至你找到一种对策的解同时也正是初始的3×m对策的解为止。

由于在上一章里，我们已经不厌其烦地采用过图解法以找出包含在2×m对策之中的2×2对策的积极策略，因而现在我们也不妨利用一下这种情势。我们先把3×m对策划分成2×m型的对策，然后替3×m对策去求出2×2型对策的解。核对蓝者-1和蓝者-2策略对抗红者所有m个策略(的结果)。接下来，也以完全相同的方法核对蓝者-2和蓝者-3策略对抗红者所有m个策略（的结果）。最后是用同法核对蓝者-3和蓝者-1策略对抗红者的全部策略（的结果）。

假使存在有一个2×2型的对策，它的解可以满足初始的对策，那么我们借助于图解法会很容易地找到它。正因其简

单，所以你在寻求3×3类型的解之前，首先应当尝试找出相似的类型之解。甚至这种检验失败之际，仍具有精神上的价值，这时因为此后在你着手寻求3×3的解时，你将明确地知道：这样的解是存在的。而这已经完全是另外一码事了。撇开别的东西且不说，绘图本身就可谓是一种娱乐消遣啦。

为了要熟悉一下3×m对策的矩阵表，让我们来观察几个这一类的实例。我们就从以下这个够庞大的矩阵表开始吧。

红者

		1	2	3	4	5	6	7	8	各行极小值
	1	6	0	2	0	7	1	2	3	0
蓝者	2	3	0	2	-5	4	8	-3	1	-5
	3	1	3	5	1	7	2	4	6	1*
各列极大值		6	3	5	1*	7	8	4	6	

照老一套的程序——找出各行的极小值和各列的极大值，紧接着就是找到最大的极小值和最小的极大值，于是便得出一个意外的结果：这真是咄咄怪事，原来有鞍点！最优策略组就是蓝者-3的策略对抗红者-4的策略。对策的得失等于对蓝者有利的1。

在下页开头的那个例子中，你就别想有这么走运的结局啦。

可是，鞍点又重新出现了。这正是向你表明：你不可轻信他人，始终都应当检验对策的鞍点。

红者

蓝者	1	2	3	各行极小值
1	−7	−11	−7	−11
2	−7	−90	−7	−90
3	−9	−10	−9	−10*
4	−7	−12	−7	−12
各列极大值	−7	−10*	−7	

现在，让我们研究对策：

红者

蓝者	1	2	3	4	5	各行极小值
1	3	5	−2	2	1	−2
2	3	6	−1	2	4	−1
3	4	3	6	7	8	3*
各列极大值	4*	6	6	7	8	

在此，我们最终未发现鞍点，但从表面上的检验就已经显示出蓝者-2的策略比蓝者-1策略优。这提供给我们

红者

蓝者	1	2	3	4	5
2	3	6	−1	2	4
3	4	3	6	7	8

在该矩阵表中红者-3策略优于红者-4和红者-5策略，因此经过消元，我们便获得矩阵

红者

		1	2	3
蓝者	2	3	6	−1
	3	4	3	6

它还需要我们做些工作。这个对策中含有以下三个2×2型的对策，即红者-1和红者-2、红者-2和红者-3、红者-3和红者-1。它们之中一个对策的解必须是原对策的解。把它们全部检验一番并不困难，而其中第一个便是：

红者

		1	2	蓝者的相对频数
蓝者	2	3	6	1
	3	4	3	3
红者的相对频数		3	1	

幸好，经判明是原对策的解。这样一来，对于蓝者来说，共同的解将是0∶1∶3，而对于红者来说，则是3∶1∶0∶0∶0。现在我们再来观察另一个对策：

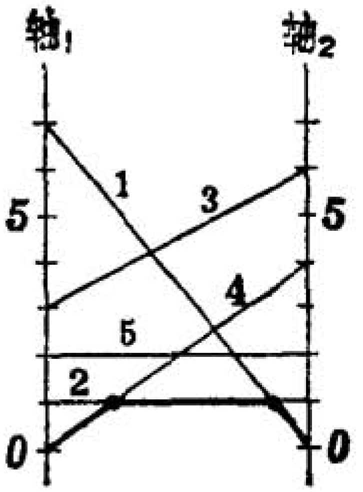
红者

		1	2	3	4	5
蓝者	1	7	1	3	0	2
	2	0	1	6	4	2
	3	1	2	0	5	5

在这里，无论是鞍点还是优势都帮不上我们的忙了。因此，我们来试找2×2型的解。第一个 2 × 5 的对策

		红者 1	红者 2	红者 3	红者 4	红者 5
蓝者	1	7	1	3	0	2
蓝者	2	0	1	6	4	2

它可用左下方的图象表达。



对图象的研究指出我们有病态的情形，因为图上有代表红者-2策略的水平线。利用图象求解对策的法则迫使我们把注意力集中在下界的最高点上。而现在这个场合，红者-2、红者-4和红者-1、红者-2的两个交点却在彼此争夺这种荣誉。以红者-2、红者-4和红者-1、红者-2为基础的 2 × 2 对策有鞍点，但是在 2 × 5 对策中却没有鞍点。所以这些鞍点不可能是 2 × 5 对策的解。不过，有并列鞍点的 2 × 2 对策包含有混合策略的解。这些解如下：

		红者 2	红者 4	蓝者的相对频数
蓝者	1	1	0	3
蓝者	2	1	4	1
红者的相对频数		4	0	

红者

		1	2	蓝者的相对频数
蓝者	1	7	1	1
	2	0	1	6
红者的相对频数		0	7	

在这些对策中，红者-1和红者-4的策略使用的频率看来都等于零。这意味着蓝者必须利用3∶1（或1∶6）的混合体，同时红者必须依从红者-2策略，他也可利用红者-1或红者-4策略，不过是以零的频率利用！这样的答案真要把你的头脑给搅得混乱不堪了。往后（相当迟）我们还将再返回到这个问题上来，但现在不值得为此再耗费时间了，因为这个2×5对策的解没一个能满足3×5对策。

为此，我们再用另一个2×5对策来试试运气：

红者

		1	2	3	4	5
蓝者	2	0	1	6	4	2
	3	1	2	0	5	5

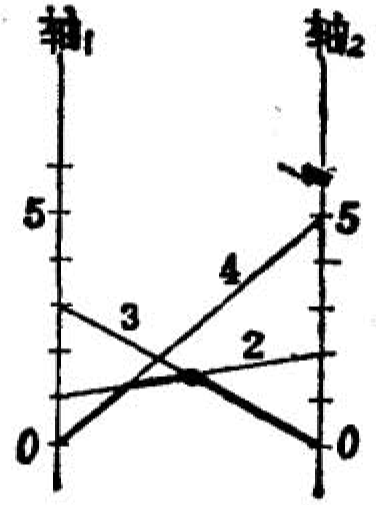
红者-2、红者-4和红者-5的策略占优势，对策因此而余下

红者

		1	3	蓝者的相对频数
蓝者	2	0	6	1
	3	1	0	6
红者的相对频数		6	1	

这个对策的解对原 2 × 5 对策是不适合的。因此，我们再试一试下面的 2 × 5 对策

	红者 1	红者 2	红者 3	红者 4	红者 5
蓝者 1	7	1	3	0	2
蓝者 3	1	2	0	5	5



红者-1 和红者-5 的策略占优势，所以我们有充分的理由只把红者-2、红者-3 和红者-4 的策略标在左边的图象上。

从获得的图象上可以清清楚楚看出：我们必须分析的仅只是一个以红者－2和红者－3策略为基础的2×2对策：

	红者 2	红者 3	蓝者的相对频数
蓝者 1	1	3	2
蓝者 3	2	0	2
红者的相对频数	3	1	

谢天谢地，这正是2×5对策的解！唉，可惜它不适合原3×5对策。

我们几乎忍受不住如此糟糕透顶的情况了。因此迄今为止，我们除了知道它既不存在鞍点，也没有 2×2 型的解之

外，对这个3×5对策的解就一无所知了。这一切的唯一好处只在于现在我们已经晓得对策拥有3×3型的解。

这样一来，我们又得干起费气力的工作了。要求解，还须坚持不懈。让我们试试对策

红者

		1	2	3	各行极小值
	1	7	1	3	1*
蓝者	2	0	1	6	0
	3	1	2	0	0
各列极大值		7	2*	6	

不存在鞍点，也没有优势。因此我们根据矩阵表

红者

1	2	3
7	0	-3
-1	-1	6

来确定红者策略的相对频数。

使用红者－1策略的频率为

0	-3
-1	6

$= 0\times 6-(-3)\times(-1)=-3,$

即是3。蓝者和红者其余的策略频率也可以用完全相同的方法求得。对蓝者而言，频率等于7∶10∶32，而对红者而

言，则等于3：39：7。这就是初始的3×5对策的解。因此，工作已经告终，我们无须再去解包含在初始矩阵表中的剩余的九个3×3型对策了：

		红者					
		1	2	3	4	5	蓝者的相对频数
	1	7	1	3	0	2	7
蓝者	2	0	1	6	4	2	10
	3	1	2	0	5	5	32
红者的相对频数		8	39	7	0	0	

在科学作品的议论中，对那些重要的事物跟不重要的事物通常都是一视同仁的。但究竟是哪一次议论，说明之后，才可以很有把握地相信：那重要的信息已铭记在读者的脑海之中了呢？这是科学上的一件怪事，因为它既想在杂志刊物中节省篇幅，又鼓励学者们著述自己的研究成果。这也为作品的长寿做了保险，因为人们想彻底弄懂这种作品，是颇需要些年头的。

倘若你（已往）已习惯于这样的文体，那么我们喋喋不休唠叨着的鞍点大约已经把你耳朵都磨出茧子来了。可以设想，如果你又遇上有关鞍点的相似说法，你准会气得骂人或者是流泪。产生所有这些麻烦的真正原因乃是经常萦绕作者的恶梦：在我们想象中有一位知识贫乏的，但是诚心诚意下决心要稍微了解一下对策论及一些不大的对策的解法的读者正陷入糟糕的境地。很有可能，他正同一只北极熊突然落在一块冰上，而他只握支未装弹的火枪。他唯一能希望的就是理智地死去。但也可能，他正呆在自己的书房里，面前除了

他决心要掌握的我们这些矩阵表外，再没有什么可致人于死地的东西。在我们第一次讲到某一种方法或是某一个概念时，他也许只把它当成一阵耳边风。也许，他听到了那一次讲解，但他对此并不理解。不过，无论他的困难是什么，治疗是很简单的：把已经叙述的内容重新读一次。现在你总该会明白我们为什么要这样做的原因了。

例十九　海鲈鱼和教授

这个故事的主角是一种灼灼发亮的幼小的水生物，人们不加想象地讲述它“类似鲈鱼，具有很高的食用价值”。故事中的凶手则是钓鱼爱好者克利宁。出场的脚色姑且就称鲈鱼和教授好了。连同若干昆虫和水，他们便构成一个自然的环境条件综合。

昆虫（大胡蜂、蜻蜓和黄蜂）充作鱼食也同样是很难得的。这些昆虫在水塘上并不是一样经常遇得上的。假如鲈鱼

爱吃的恰正是教授添（挂在鱼钩上）的那种昆虫，则它上钩的概率依次比例为2∶6∶30。这是表示，在空中蜻蜓是黄蜂的五倍，而大胡蜂则是蜻蜓的三倍①。问题在于：鲈鱼应吃什么食和教授应投什么饵？这个对策的支付表为：

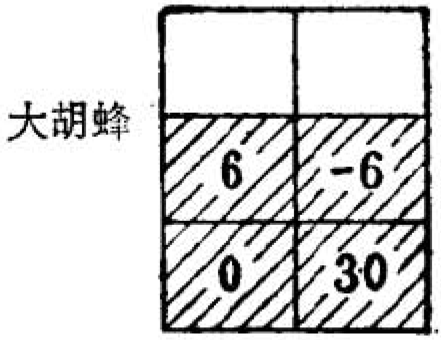
		教授应投作饵料的		
		大胡蜂	蜻蜓	黄蜂
鲈鱼吃的	大胡蜂	−2	0	0
	蜻　蜓	0	−6	0
	黄　蜂	0	0	−30

对策中既无鞍点，也无优势。我们替鲈鱼编制一份带斜线的矩阵表：

大胡蜂	-2	0
蜻　蜓	6	-6
黄　蜂	0	30

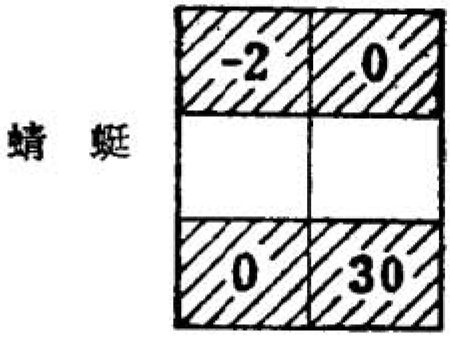
因此，它吃大胡蜂的频数

①可以说：15n只大胡蜂，5n只蜻蜓和n只黄蜂，并且n足够大，所以教授添上一只昆虫，实际上不会改变它们的相对数。因而鱼上钩的概率分别等于1/15n，1/5n和1/n。但字母n不是一个忙人的好朋友。为此，我们把全部概率都乘以30n，便获得2：6：30。为什么我们恰恰都用30n去乘呢？那么，首先（要反问一下），为什么不能呢？其次，这是为了在稍后教授开始使用新的饵料时避开分数。任何一种昆虫都有可能充做饵料，但是这同时又可能引起双倍的怀疑，因此因饵料而上钩的概率彼此为1：3：15。——作者原注。



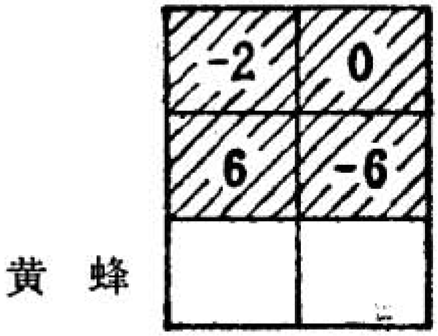
=180，

吃蜻蜓的频数



=60，

而吃黄蜂的频数则



=12。

或者，用12来约，那么它的混合策略就应当是15∶5∶1。可以告诉你，教授采用的也正是这策略。对策的得失对鲈鱼来说是否定的，它等于－10/7。

钓鱼者们很喜欢搞试验跟买东西，有时甚至也利用新的饵料，只要那不是蛆就行。教授买了只新的绝佳的人造苍蝇，可以用它替代三

种昆虫中的任意一种。然而，假苍蝇同时也引起鱼儿的双倍疑虑，这就减低了它的实效。补充了新饵后，对策变做：

	教授			
	大胡蜂	蜻蜓	黄蜂	人造苍蝇
大胡蜂	－2	0	0	－1
蜻　蜓	0	－6	0	－3
黄　蜂	0	0	－30	－15

现在，鲈鱼应该遵循策略3：1：0，它与先头的策略稍有差异，因为黄蜂成了太危险的东西！教授应该依从策略7：2：0：1，而且不要把黄蜂挂上鱼钩。他的新饵只利用10%。现在对策的得失等于－30/20，也就是说，对教授而言，同原策略的得失－30/21相比，改善极小。这就很好地确证了一个一致公认的见解：钓鱼是非常费钱的。

例二十　同病人打交道的本领

一位病人患有某种众所周知的疾病，并已知这种疾病有

五种类型的细菌。本德大夫难于只凭一次检查便作出诊断。

他再次摸了摸患者的脉搏。患者的信赖程度大为提高，因为大夫重新为他按脉正证明了他的认真和严肃。然而，假使患者明白大夫为

其按脉的真正底细，则他刚才的信赖感便要立即降低：大夫需要的仅止是看看自己手表上的秒针，因为他需要某个随机数。这证明了尽管大夫确实值得患者完全信赖，但这信赖的理由却可能是极容易使人弄错的。他实在也没有时间同时教他医学和对策论。

大夫有三种药品。服用其中第一种药品保证对四种细菌有50%治疗作用。第二种药品大致只能杀死这四种细菌中的一种。而第三种药品则保证消灭这四种细菌中的另外一种的50%，但是它对抗第五种细菌却有充分把握。

支付矩阵表将为：

		细菌种类 1	2	3	4	5
药品	1	1/2	1/2	1/2	1/2	0
	2	1	0	0	0	0
	3	0	1/2	0	0	1

从自然的观点看，细菌1和2同细菌 3 和 4 相比并不显得优，而上述这些种类细菌从受抵抗的观点来看是完全等值的。因此，我们这个对策就归结为下述的：

		细菌种类 4	5
药品	1	1/2	0
	2	0	0
	3	0	1

不要求大夫是个天才，能够观察出在这个简略的对策中，相比之下药品－2 并不优于其余两种药品。因此，矩阵表将是：

细菌种类

	4	5	大夫的相对频数
药品 1	1/2	0	1
药品 3	0	1	1/2
自然的相对频数	1	1/2	

有利于药品－1的相对频数是1：1/2或2：1。所以，大夫的混合策略应该是2：0：1。对策的得失等于1/3，而且自然也不可能为所欲为地使对策的得失降到低于平均值。

在这里，恐怕得稍为岔开说明一下：假如这个大夫懂一点自然的策略，那么情势会有什么变化。由于自然并不爱报复人，所以它不会因为大夫利用了这些知识而对他进行惩罚。

但愿你从经验中已知自然所使用的混合策略和细菌的种类是以符合1：3：3：2：5的相对频数呈现出来的。现在大夫可以统计出他平均使用各个策略时的收入。比方说，如果他固定不变地使用药品－1，则他的平均收入将等于（按照原对策）：

$$\frac{1\times1/2+3\times1/2+3\times1/2+2\times1/2+5\times0}{1+3+3+2+5}=\frac{9/2}{14}$$

$$=\frac{9}{28}。$$

在使用药品－2情况下，他的平均收入将为：

$$\frac{1\times1+3\times0+3\times0+2\times0+5\times0}{1+3+3+2+5}=\frac{1}{14}=\frac{2}{28}。$$

在使用药品－3时，这平均收入将等于13/28。

所以，现在对策具有下面的形式：

		自然
大夫	1	9/28
	2	2/28
	3	13/28

显然，大夫将采用药品－3。该对策的得失等于$\frac{13}{28}$，它大于$\frac{1}{3}$，即大于初始对策的得失。这样子，现在大夫已经掌握的补充信息（情报），确实给他带来了肯定的益处。在同自然的抗争中，这永远是公道的。

这样的推理还可以再往下继续进行一些：倘若自然果真如同我们预测的那样使用了1∶3∶3∶2∶5的混合策略，而大夫由于无知仍旧使用对策论（在无情报的对策中）曾向他指示的2∶0∶1的混合策略的话，他的收入照样大于$\frac{1}{3}$，即大于初始对策的得失。这说明自然使用的并非其较优的策略①。我们看到，它若采用策略1∶3∶3∶2∶5，就会使对策变为这样的形式

①即指自然使用着那些不包括在最优混合策略中的纯策略（第一、二、三种类的细菌）。——俄译者注。

		自然
大夫	1	9/28
	2	2/28
	3	13/28

如果大夫按起先分析得到的结论，使用 2:0:1 的混合策略的话，那么他的平均收入将是

$$\frac{2\times\frac{9}{28}+0\times\frac{2}{28}+1\times\frac{13}{28}}{2+0+1}=\frac{31}{84}。$$

因此，可以做出下述结论：假使对策的进行正如大夫想象的那样，同时自然却以最不利的方式行动，那么大夫会收入 1/3＝0.333。假使自然使用 1:3:3:2:5 的策略，他会收入 31/84＝0.369。假使他知道自然的策略，那么他就可以从 2:0:1的策略转变为0:0:1的策略，并收入13/28＝0.464。这样一来，他附加的知识给他带来的收入恰好是26%。

在现实生活中也能遇上同样的情势，（局中人）由于拥有部分情报（信息）以及运用对策论的技巧，有可能获得一个良好的结果，哪怕局中人并不知道对策的得失的精确数值。

例二十一　象　棋　手

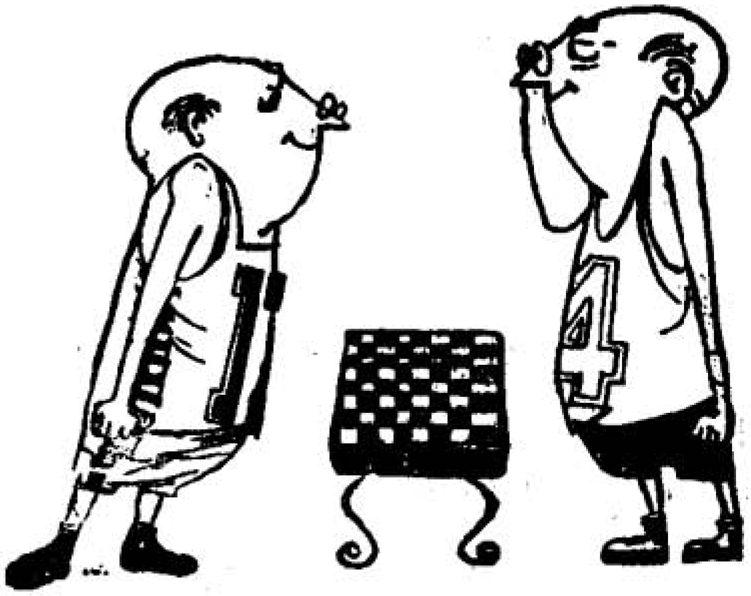
有两支分别由三人组成的棋队聚在一起，要各下两盘象棋。已知比赛安排为巴拉京、博德霍尔和布朗对贝尔玛·布朗和布朗。我们为这儿有如此之多的布朗而表示遗憾，然而，实际情况就是这样子。不过，在一个善于猜谜的人看

来，这一点儿都不会引起混乱的。

布朗能赢巴拉京，巴拉京能赢贝尔玛，而贝尔玛能赢博德霍尔。在其余的方面，竞赛者都相同。在最后一局时，其中一个布朗生病了。这一切情报（信息）可以归结到以下的矩阵表中：

	巴拉京	博德霍尔	布朗
贝尔玛	−1	1	0
布　朗	1	0	0

各队必须选定两个棋手和他们上场的顺序。为着补偿布朗不知怎地得的病，他们做了个决定：如果本人愿意的话，队长布朗可以为自己人手不足的代表队下两盘象棋。



现在的可能性（表中“巴—博”指的是巴拉京下第一盘，博德霍尔下第二盘，如此类推）为：

	（1） 巴—博	（2） 巴—布	（8） 博—巴	（4） 博—布	（5） 布—巴	（6） 布—博
贝—布	−1	−1	2	1	1	0
布—贝	2	1	−1	0	−1	1
布—布	1	1	1	0	1	0

在对策中没有鞍点，但策略－〈1〉较策略－〈2〉占优势，策略－〈3〉较策略－〈5〉占优势。所以竞赛（对策）采取形式：

（2）	（4）	（5）	（6）
－1	1	1	0
1	0	－1	1
1	0	1	0

再经过相对较少的努力，我们便可获得如下的解：人手不全的棋队应按 1:1:1 的相对频数混合使用自己的策略。而另一个棋队则有两种解：0:1:0:2:0:0，或者0:0:0:0:1:2。

关于 3×m 对策解法的结论

3×m 对策的解法跟 3×3 对策的解法差别很小。通常，你就从寻找鞍点开始，假使没能找着，就请利用优势原理试着消去某些行或列。如果这些还未能将你的对策变为你能对付的那种类型，即 2×2 型、2×m 型和3×3型，那么你可以遵循以下两种办法之中的一种继续做：

一、抽选出某个包含在原对策之列的3×3对策，并把它的解代入原3×m对策中。反复进行这种运算，直至你成功为止。

二、将对策分解成建立在蓝者－1 和 蓝者－2、蓝者－2 和蓝者－3、蓝者－3和蓝者－1策略之上的三个2×m 对策，并借助图解法寻找出这种2×2型对策的解，使它既满足2×m 对策，又能期望它满足初始的3×m 对策。假使这些尝试都告失败，则是不存在这2×2型的解，那么你就必须采用第一种方法。

本节后面的练习题是由你们必须接触的内容中选出的最好的题目。你的苦恼能跟我们的苦恼并驾齐驱，这还是头一遭呢。

练 习 四

确定下列对策的相对频数和得失。

1. 红者

		1	2	3	4
	1	1	7	3	4
蓝者	2	5	6	4	5
	3	7	2	0	3

2. 红者

		1	2	3	4
	1	1	2	3	5
蓝者	2	10	11	12	4
	3	9	8	7	6

3. 红者

		1	2	3	4
	1	1	6	2	5
蓝者	2	5	1	6	2
	3	2	5	1	6

4. 红者

蓝者		1	2	3	4
	1	6	0	1	2
蓝者	2	0	3	1	0
	3	2	0	3	1

5. 红者

		1	2	3	4
	1	1	0	1	0
蓝者	2	0	1	0	1
	3	1	0	0	1

6. 红者

		1	2	3	4
	1	0	1	2	3
蓝者	2	3	2	1	0
	3	0	2	1	3

7. 红者

		1	2	3	4
	1	8	0	6	7
蓝者	2	3	3	4	8
	3	3	6	3	1

8.

红者

蓝者		1	2	3	4
	1	3	4	0	2
	2	6	1	3	0
	3	2	5	3	6

9.

红者

蓝者		1	2	3	4	5
	1	1	3	5	3	1
	2	4	2	0	0	2
	3	1	2	1	4	4

10.

红者

蓝者		1	2	3	4	5	6
	1	4	3	3	2	2	6
	2	6	0	4	2	6	2
	3	0	7	3	6	2	2

11.

红者

蓝者	1	2	3
1	8	2	−4
2	4	1	−2
3	0	0	0
4	−4	−1	2
5	−8	−2	4

12.

红者

蓝者	1	2	3
1	0	−17	−34
2	−2	−15	−35
3	−20	−22	−24
4	−3	−15	−35
5	−40	−27	−14
6	−5	−21	−30

13.

红者

蓝者	1	2	3
1	−1	0	1
2	1	0	0
3	1	−1	0
4	5	−4	−2
5	0	0	1
6	0	1	0
7	25	−13	−12

14\. 红者

蓝者

	1	2	3
1	3	5	1
2	−6	2	0
3	5	4	3
4	−7	3	6

15\. 红者

蓝者

	1	2	3
1	3	1	4
2	1	5	9
3	2	6	5
4	3	5	8

第四章　四种及更多种策略的对策

如果你对算术的癖好没有发展到如痴如醉的程度，那么求解有四种或四种以上策略的对策对你来说，就将是一种不很愉快的功课。不过，这些对策的情势本身具有的极大趣味却能在某种程度上补偿计算上的烦恼。照一般的惯例，一个人在解出一个大型的对策之后，他就会感觉到某种满足。

借助猜测求解

求解大型对策的较佳方法是采取猜测。假如你能从问题的构成中猜想到解，或者你从任何来源获得某种可靠的暗示，那就请你检验你的猜测。为此，只须统计一下平均支付，比方说，蓝者运用其假定是正确的混合策略逐一地对抗红者的各个纯策略。如果你的猜测是对的，那么就有两种情况：第一，所有的支付值应该都相等（允许除去蓝者同红者的不包含在最优混合策略之列的那些纯策略对抗时获得的较大的支付值）。第二，当红者运用其最优混合策略对抗蓝者的各个纯策略时，这个支付值应该重现出来；但是在其同蓝者的不包含在最优混合策略之列的那些策略对抗时，该支付值可能较小（而这是对红者有利的）。

下面所举的例子可以证明，这些（东西）讲起来比实际上（要做的）容易多啦。

现在让我们观察以下的5×5对策：

		红者				
		1	2	3	4	5
	1	0	1	0	2	0
	2	3	0	0	1	2
蓝者	3	0	0	2	1	2
	4	1	3	0	0	1
	5	1	2	3	1	0

假如你是第七个儿子的第七个子孙，你有异常晶莹透亮的水晶球，同时你是幸运儿之中的幸运儿，那末你必定恍然大悟：红者必须按4：35：6：57：40的相对频数混合使用自己的策略。

这些当成解的数字的用途可以下面的方法将其确定下来：我们假定这些数是对的，并计算对策的得失。为了方便起见，我们把矩阵表改写成如下形式：

4	35	6	57	40
0	1	0	2	0
3	0	0	1	2
0	0	2	1	2
1	3	0	0	1
1	2	3	1	0

现在，请你在观察一行的同时，将频率乘以相应的支付，把所有的积数相加，再将和数除以相对频数的总和。这样，在同蓝者的第一策略（第一行）对抗时的平均支付等于：

$$\frac{4\times0+35\times1+6\times0+57\times2+40\times0}{4+35+6+57+40}=\frac{149}{142}。$$

在同蓝者的第二种策略对抗时，它的平均支付等于（乘数为零的积数已省略）：

$$\frac{4\times3+57\times1+40\times2}{142}=\frac{149}{142},$$

在同蓝者-3策略对抗时

$$\frac{6\times2+57\times1+40\times2}{142}=\frac{149}{142},$$

在同蓝者-4策略对抗时

$$\frac{4\times1+35\times3+40\times1}{142}=\frac{149}{142},$$

而在同蓝者-5策略对抗时

$$\frac{4\times1+35\times2+6\times3+57\times1}{142}=\frac{149}{142}。$$

现在完全清楚了：你有关红者的混合策略的情报（信息）来源是值得重视的，因为红者在采用它的情况下获得的结果（支出149/142单位）的稳定性看来不是毫无意义的。不过，我们没再证明我们的相对频数是最佳的，因为可以看得出蓝者的最优混合策略至少能担保他收入148/142，而不是149/142。因此，我们同样地也必须为蓝者的策略寻找相对频数。假如你已能够找到上述引用的红者的频数，那么我们可以预测出你不费很大气力同样能够知道蓝者的频数是28：33：31：21：29。此后，你可以证实蓝者的支付仍然等于149/142。

每个对策的解都应该用与此完全相同的方法加以检验。这是你对抗变幻莫测的算术演算以及克服人与方法的其它弱点的唯一护身符。

鞍　　点

如果一个大型的对策拥有一个或两个鞍点，那么它的解就容易找到。例如：

红者

		1	2	3	4	各行的极小值
蓝者	1	6	5	6	5	5*
	2	1	4	2	-1	-1
	3	8	5	7	5	5*
	4	0	2	6	2	0
各列的极大值		8	5*	7	5*	

各行的最大的极小值等于5，各列最小的极大值同样也等于5。这就意味着存在鞍点。在这个场合，鞍点甚至有四个。（请注意：如果存在几个鞍点，那么它们都具有相同的意义。）这样，蓝者可以采用蓝者-1或者蓝者-3的纯策略，红者相应地可以采用红者-2或红者-4的策略。只要他们愿意的话，他们也可以以任何方法混用这两种策略。对策的得失等于5。

优　　势

（在大型的对策中）检验占优势的列和从属的行，恰同在

小型的对策中一样，总是有意义的。如果出现这类的行或列，则可将其从对策的矩阵表中删除掉，或者将其记成零的相对频数。比方说，下面所引的这个矩阵表实质上是 3 × 3 对策的矩阵表。按照两位局中人的观点，未标星号的行或列比起标上星号的那些行或列就显得不大合乎期望。

红者

蓝者	1	2	3	4	5	6	
1	3	5	7	2	3	6	
2	7	5	5	4	5	5	*
3	4	6	8	3	4	7	*
4	5	0	3	4	4	2	
5	7	2	2	3	5	3	
6	6	3	4	5	6	5	*
		*		*	*		

从这个例子中应当明确到：虽然寻找占优势的策略在原理上是简简单单的，但是它却是一种极令人厌烦的手续。

全部策略都是积极策略时的情况

如同在 3 × 3 对策中的情况一样，在对鞍点和优势进行检验之后，我们便假定全部策略都是最优混合策略中的积极策略，并试图求出它们的相对频数。为了完成这个任务，我们在解 3 × 3 型对策的技巧中再补充一种技术方法。

我们举 4 × 4 对策为例来阐述它：

红者

		1	2	3	4
蓝者	1	1	7	0	3
	2	0	0	3	5
	3	1	2	4	1
	4	6	0	2	0

往下将会明白这种方法可以推广到具有任意个策略的对策。

象往常一样，我们从解红者的问题着手。首先，就跟我们在解2 × 2对策和3 × 3对策时完全一样，从各个支付值中减去其下面的支付值。这提供给我们

红者

1	2	3	4
1	7	-3	-2
-1	-2	-1	4
-5	2	2	1

任何一种纯策略的相对频数都取决于从带斜线的列的矩阵表中删去代表其纯策略后所剩余的部分。这样，比如说，红者-1策略的相对频数便可借助以下数字来确定：

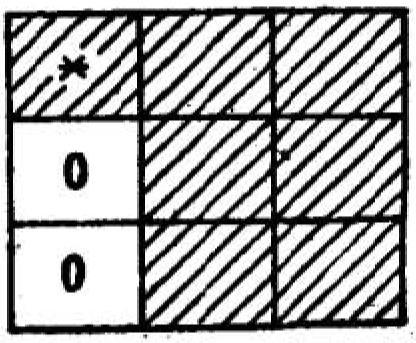
1			
	7	-3	-2
	-2	-1	4
	2	2	1

用类似的带斜线的矩阵表来确定相对频数，甚至对复杂的对策来说，在原理上也简单得象从一逐个数到一百万一样。在求解的每一个阶段，你都完全准确地知道你继续要做的事。毫无疑问，完成这些事比说明它更容易得多。遗憾的是，我们必须从讲解开始。

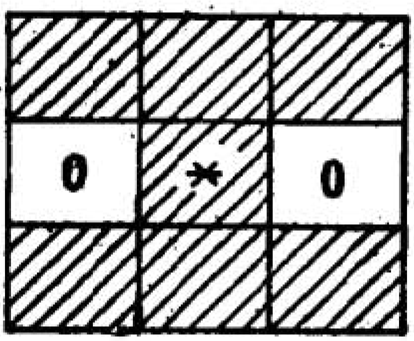
为了确定奠基于某个带斜线的矩阵表中的相对频数，我们必须以零来替换矩阵表中的若干数字。特别是在我们为此而采用一种确有根据的方法时，我们必须用零替换某一行（或是某一列）的除一个数外的全部数字。这样，我们可以变 3 × 3 矩阵

7	−3	−2
−2	−1	4
2	2	1

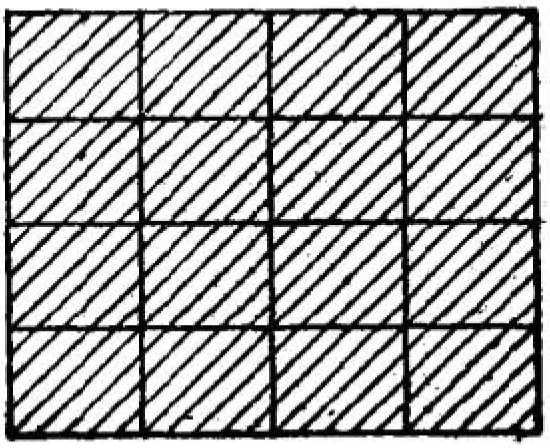
为下列形式的矩阵：



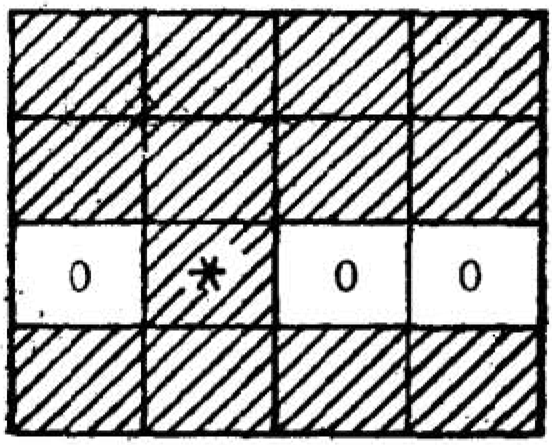
或者



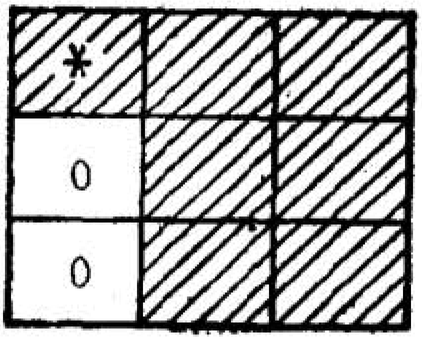
那些含有对应数字的带斜线的方格，有可能面目全非。以星号标出的方格显示行或列的那个因素不与零相等。这些评语同样可应用于大型的矩阵表。这样，假如我们遇上一个下面形式的矩阵表：



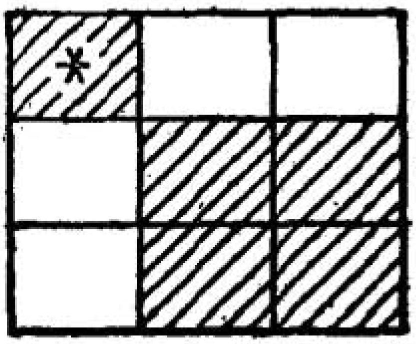
我们能够希望把它变成矩阵表



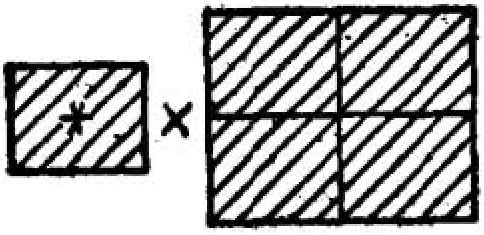
对零的这种兴趣从何而来呢？当然，这种兴趣纯粹是讲求实用的，因为我们一旦获得这种矩阵表，我们便可以置带星号方格上、下、左、右的所有方格于不顾，而且带星号的方格本身也可以移出矩阵表充做乘数。这样，矩阵表



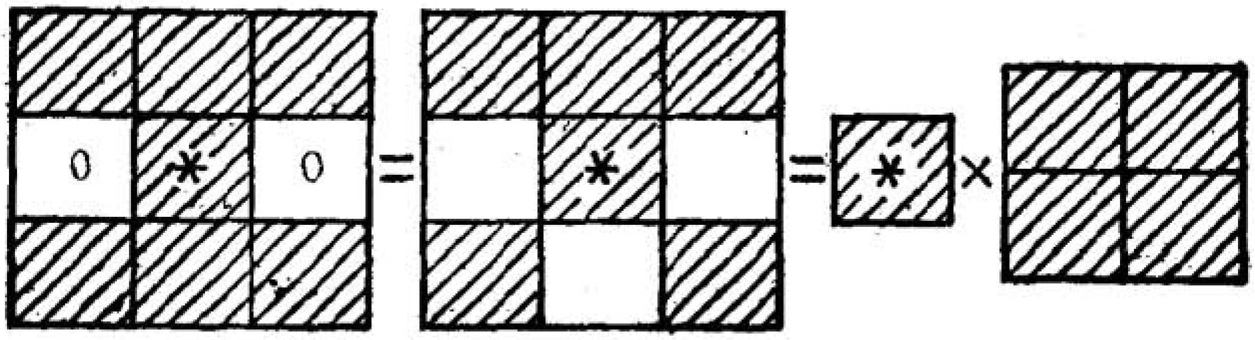
相当于矩阵表



它同样地相当于表示式



正是这样



（在最后一步，位于外围的方格彼此结合起来。）

这样的步骤很快便把 3 × 3 型的矩阵表变成为一个被乘以带星号方格中的数字的 2 × 2 型的矩阵表。而我们已经知道如何计算 2 × 2 型的矩阵表：应计算出沿对角线因素乘积的差数。在 4 × 4 矩阵表情况时，这种步骤必须进行两次，以便把该矩阵表降低为 2 × 2 型的矩阵表（连同两个乘数）①。

①这种步骤并非初看上去那么笨拙和随心所欲。实际上确有推导（此法）和证明其正确性的严谨的数学理论。假使你曾经学习过怎样演算行列式的代数课程，那么你早在读这段注解之前就已了解这种步骤了。——作者原注。

在说服你们相信分布于矩阵表中带斜线部分的若干策略点上的零是合乎期望的之后，现在我们转到怎样获得这种零的方法上来。这样做时，我们将遵循下述规则：

一、你们可以把任一行的数同另外任一行的数，逐个方格地合并（加）在一起。

二、减也具有同加相同的"权力"。因此，你利用这条原理，有充分的理由从任何一行的数中减去另外任一行的数。

三、在将一行的数加上另一行的数之前，你们可以把它们乘以某个适合的数字。

四、列和行的权利是完全相等的。因此，有关行的各种规则，对列也是一视同仁的。

五、在应用这些规则时，应表现出最大限度的技巧。

第五条规则的意义在于：假使能够正确地选择矩阵表中的方格，使其数变为零，那么问题就简化了。因此，请你要细心地挑选出合适的起点。

现在让我们回到矩阵表

7	-3	-2
-2	-1	4
2	2	1

并且，把我们新的规则应用于表上。末尾一行包含两个2和一个1（第五条规则）。运用减法（第二条规则）和若干乘法（第三条规则），我们必定能在需要的位置获得零。我们就由从列-1中减去列-2开始吧：

$$\begin{vmatrix} 10 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

它给我们提供了第一个零。我们把最后一列乘以2，并且从第二列中减去它，就可以得到与第一个零并列的第二个零，即：

$$\begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ -1 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 1^* \end{vmatrix}$$

而这恰好是我们希望获得的，因为现在最后一行中除一个方格外，都由零组成。但是

$$\begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ -1 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 1^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 1 & \\ -1 & -9 & \\ & & 1^* \end{vmatrix} =$$

$$= \boxed{1^*} \times \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ -1 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \times [10 \times (-9) - 1 \times (-1)] = -89$$

数字89就是在第165页上遇到的那个对策中红者－1策略的相对频数。如果你已经开始为明白了这种方法而感到骄傲，那么在为红者－2策略计算相对频数时，则又向你提供了一个证明的机会。

在初始的带斜线的矩阵表中删去第二列，即由矩阵表

红者

1	2	3	4
1	7	-3	-2
-1	-2	-1	4
-5	2	2	1

得到

1	-3	-2
-1	-1	4
-5	2	1

这个矩阵表确定着红者－2策略的相对频数。第二行能为获零提供一条捷径。所以，我们就由从第一列减去第二列开始，它得出：

4	-3	-2
0	-1	4
-7	2	1

然后，我们将第二列乘以 4 ，并再将它加到第三列

4	-3	-14
0	-1*	0
-7	2	9

这相当于

$$\begin{vmatrix} 4 & & -14 \\ & -1 & \\ -7 & & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4 & -14 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \times [4 \times 9 - (-7) \times (-14)]$$

$$= 62$$

这就是红者－2策略的相对频数。再往下，我们求出：红者－3和红者－4策略的相对频数相应为119和83。

为了要确定蓝者的最优混合策略，我们必须返回到初始的矩阵表，即矩阵表

蓝者				
1	1	7	0	3
2	0	0	3	5
3	1	2	4	1
4	6	0	2	0

从其左邻中减去各个支付值，就组成一个新的带斜线的矩阵表：

蓝者			
1	-6	7	-3
2	0	-3	-2
3	-1	-2	3
4	6	-2	2

删除第一行，我们获得

0	-3	-2
-1	-2	3
6	-2	2

对于蓝者－1策略而言，这个矩阵表就确定着相对频数的大小。为此所必不可少的零，可由第二行的六倍数加上第三列获得。这得

0	-3	-2
-1*	-2	3
0	-14	20

=

	-3	-2
-1*		
	-14	20

=

-1*

×

-3	-2
-14	20

=

$$= -1\times[(-3)\times 20-(-14)\times(-2)]$$
$$= 88$$

蓝者－2、蓝者－3和蓝者－4策略的相对频数可以用同 样 的方法确定出来。最终的结果可以用下面的矩阵表形式表示：

红者

		1	2	3	4	蓝者的相对频数
蓝者	1	1	7	0	3	88
	2	0	0	3	5	86
	3	1	2	4	1	78
	4	6	0	2	0	101
红者的相对频数		89	62	119	83	

当然，还须检验一下所求得的相对频数是否确为对策的解。我们已经这样检验过了，但我们不反对你也做一 做 核 对 工作。比方说，用红者的最优混合策略对抗蓝者－2 策略（无疑地，任一局中人的最优混合策略都可以用于对抗包含在另一局中人混合策略之列的任一纯策略），便可求出对策的得失，即

$$\frac{119\times 3+83\times 5}{89+62+119+83}=\frac{772}{353}$$

因此，在正确的对策情况下，蓝者一局中的平均收入应该稍大于两个单位。

在要把你留在以后的一大串练习题前去冥思苦想之前，我们还想再向你介绍一种需要采用双重方法来简化矩阵表的例子。在对策

红者

	1	2	3	4	5
蓝者 1	0	1	0	2	0
2	3	0	0	1	2
3	0	0	2	1	2
4	1	3	0	0	1
5	1	2	3	1	0

中，我们让你自己确认其中既无鞍点，也无优势（可能有吗？）。然后，把自己注意力集中到红者的混合策略上，我们从直接位于其上方的支付值中减去各个支付值。这提供给我们

红者

1	2	3	4	5
-3	1	0	1	-2
3	0	-2	0	0
-1	-3	2	1	1
0	1	-3	-1	1

为了举例说明，现在我们假定想替红者－3策略寻找相对频数。在删除红者－3的列之后，便获得一个下面形式的矩阵表：

-3	1	1	-2
3*	0	0	0
-1	-3	1	1
0	1	-1	1

看来，第二行已经具有我们所要求的形式：除一个数外，全部支付值都等于零。因此，我们从消去位于支付值3*上下左右的支付值着手，很快就可简化矩阵表：

	1	1	-2
3*			
	-3	1	1
	1	-1	1

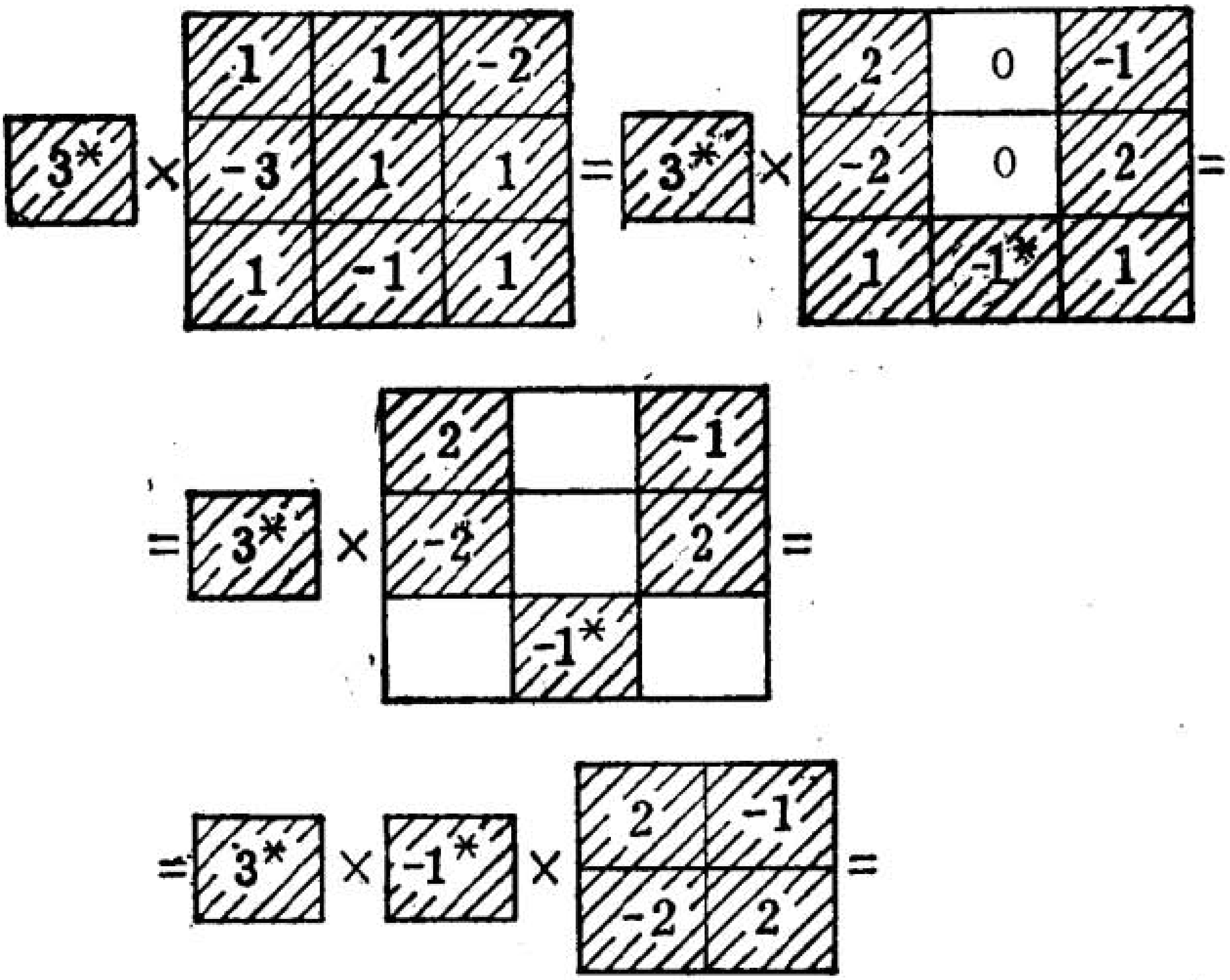
=

3*

×

1	1	-2
-3	1	1
1	-1	1

为了简化 3 × 3 矩阵表，我们把注意力放在第二列的数字上。非常明显，我们先把第三行同第一行相加，而后再同第二行相加，就能得到所需的零。完成这些步骤后，我们可获得以下的结果。也许，你已经知道这个作为红者－3策略相对频数的6，因为它恰好就是你在本章开头根据猜测解出的那个例子。



$$= 3\times(-1)\times[2\times 2-(-2)\times(-1)] = -6$$

例二十二　一辆旧汽车

格莱丁和顿得到一辆价值800美元的汽车遗产。由于他们俩都是嗜好成癖的个人主义者，不希望与公有制发生关系，所以他们协商好借助密封在信封中的各自已宣布的赌注来解决汽车归属问题。谁出的钱数较多，谁就得

到这辆汽车，并且支付这个钱数给另一位继承人。如果两人确定的数字相等（这完全是有可能的，因为他们已经约定彼此的赌注相差不低于100美元），那么车主的问题就要由借助硬币的抽签决定。在这种场合，他们谁也不付钱给对方。格莱丁手头有500美元，与此同时，顿有800美元。他们应当如何下自己的赌注呢？

在借助抛硬币方法解决车主问题时，他们成功（赢利）的可能性是相同的。由于汽车值800美元，所以这样的成功可能性可以评价为400美元。

因为掌握着这个情报，我们就可以用格莱丁所期望的收入来填写支付矩阵表（单位为百美元）：

顿的赌注

格莱丁的赌注	0	1	2	3	4	5	6	7	8	各行的极小值
0	4	1	2	3	4	5	6	7	8	1
1	7	4	2	3	4	5	6	7	8	2
2	6	6	4	3	4	5	6	7	8	3
3	5	5	5	4	4	5	6	7	8	4*
4	4	4	4	4	4	5	6	7	8	4*
5	3	3	3	3	3	4	6	7	8	3
各列极大值	7	6	5	4*	4*	5	6	7	8	

首先，我们检验对策的鞍点，并且很快发觉有这样的点，因为最小极大值和最大极小值都等于400美元。实际上，

这个对策包含有四个鞍点：各个局中人必须标出300美元或是400美元。300美元的赌注略微更诱人些，因为在这种场合，其中一个局中人由于对策失误而使其支出（损失）增大了。

例二十三 喷雾器

哈里斯和德思京果树喷药公司停业了。伙伴们都企望获得公司的主要财产：一台价值400美元的空气压缩机和一辆价值600美元的四吨卡车。他们决定筹办一次内部拍卖（如同例二十二那样），同时每件售品的标价必须多于200美元。在占有者问题形成平局时，则借助纸牌解决：谁翻开的扑克牌较佳，谁就赢。拍卖所赚的钱款算做公司的资财，因此合伙者均分一份。

我们将藉由两个数码组成的指标来表示每个策略规定的价值（得失），比方说42，它就代表着压气机标价400美元，而卡车标价200美元。

此后，便可以很容易地计算出以百美元为单位的（对哈里斯而言的）支付矩阵表。比如说，假使哈里斯提出22，而德思京提出06，那么哈里斯就可得到价值400美元的压气机和一半的资财，即$\frac{2+6}{2}=4$。这样一来，他支付2之后，却收入8，因而他的利润等于6。在所下赌注相等的情况下，

支付值就统计为两件东西标价的一半，这样一来，双方的输赢要取决于扑克游戏变幻莫测的最终结局了。对策的矩阵表形式将为：

德思京

哈里斯	00	02	04	06	20	22	24	26	40	42	44	46	各行极小值
00	5	3	4	5	4	2	3	4	5	3	4	5	2
02	7	5	4	5	6	4	3	4	7	5	4	5	3
04	6	6	5	5	5	5	4	4	6	6	5	5	4
06	5	5	5	5	4	4	4	4	5	5	5	5	4
20	6	4	5	6	5	3	4	5	5	3	4	5	3
22	8	6	5	6	7	5	4	5	7	5	4	5	4
24	7	7	6	6	6	6	5	5	6	6	5	5	5*
26	6	6	6	6	5	5	5	5	5	5	5	5	5*
40	5	3	4	5	5	3	4	5	5	3	4	5	3
42	7	5	4	5	7	5	4	5	7	5	4	5	4
44	6	6	5	5	6	6	5	5	6	6	5	5	5*
46	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5*
各列极大值	8	7	6	6	7	6	5*	5*	7	6	5*	5*	

在检验中，迅即发现在这个12×12对策中有众多的鞍点。整整有16个鞍点，它们分别对应于策略－24、－26、－44和－46。任一鞍点都保证每个伙伴有平等的成功的机会，但在竞争者对策失误时，其中若干鞍点会使他遭受到更令人心痛的惩罚。假如德思京在对策时不认真的话，那么哈里斯为压气机和卡车所投的200美元和400美元的赌注能使他相应获得700美元的纯利。但是，假如德思京所投（赌注）价值相同，在哈里斯疏忽大意时，他能够获得纯利却总共不过300美元而已。假如他们不遵循鞍点行动，则他们的支付值可能在200美元至800美元的范围内变动。

因为对哈里斯而言，对策的得失等于500美元，所以这个对策看来似乎对德思京是不公平的。但实际上这个对策是对称的：公司的资产是1000美元，而德思京得到其半数。

我们针对此例及上例所作的注解，即一种好策略有时比另外一种好策略更好的说法，能轻易地挑起任何一帮子对策论专家间的激烈争论。有这种崇拜的严肃的信徒们将提出异议说，极小（值）的原则（就是在有鞍点的情况下，极大值和极小值相等）是对策论的唯一法则和众所周知的综合对策论中各种学说的唯一准则。既然这个标准已经可以满足，更远的东西我们就不再多谈了。把这种观点应用于目前的情势中，它便意味着我们经过预测得到了鞍点，它也意味着我们的对手是相当聪明的，是懂得评估鞍点的优点的。

“既然已承认这种观点，我们就别再离题啦，”他们说，“那就让我们断言：一个鞍点比另一个鞍点好，因为对手有可能不依从带鞍点的策略。”

作者是赞同这种看法的，但不是非常赞同。

例二十四 彩色扑克牌

梅尔和佩伊不懂得数数，这妨碍了他们玩通常的扑克牌游戏。不过，他们会辨别颜色，因此，他们发明了下述一种新的玩法：在玩之前各人先拿出1美元做赌本，然后从洗过的纸牌中发给各人一张牌——这些就是他们得到的全部东西。在这两个无知的人看来，黑牌优于红牌，而在其余各方面，所有的纸牌都是相同的。

第一个局中人梅尔，可以喊"帕司"（声明不进牌）或者是放下一美元做赌本。如果他喊"帕司"，纸牌翻开，赌本便落入拥有较优纸牌的人手中。如果纸牌相同，则赌本均分。如果是他下赌注，那么佩伊可以喊"帕司"（在这种情况输掉），放下一美元（被迫在这时翻牌）或者是放下两美元以增加赌注。

如果佩伊放下两美元，那么梅尔可以喊"帕司"（这时输掉），或者是放下一美元（被迫翻牌）。

这样，各个局中人在每一局中都可能冒（失去）一、二、三美元的风险，同时他的策略又是由他相应冒险投放在红牌和黑牌上的钱数总和确定的。我们将以括号内的数码（1，3）来代表这样的策略：局中人想用一美元在红牌上冒险，用三美元在黑牌上试一试运气。各个局中人都拥有九种这样的策略。

编写支付矩阵表是一件简单的、但又令人厌烦的事情。我们要替每组策略进行下面这种演算〔我们举替梅尔（2，2）策略对抗佩伊（3，2）的策略做的统计为实例〕：

佩伊

		拥有红牌，并押下3美元	拥有黑牌，并押下2美元
梅尔	拥有红牌，并押下2美元	-2	-2
	拥有黑牌，并押下2美元	-2	0

左边两个方格对应的情况是梅尔输掉2美元，因为它被押下较高赌注进行投机的佩伊吃掉了。右上方格是在翻牌时输掉2美元，因为佩伊的牌较好。右下方格是平局，所以结果为零。在整副纸牌里，红牌和黑牌的张数是相等的，因此对在方格显示的这四种事件中的每一种来说，有利于它们的机会也是相等的。所以，采用梅尔-（2，2）策略对抗佩伊-（3，2）策略时，对策的平均得失等于

$$\frac{1\times(-2)+1\times(-2)+1\times(-2)+1\times0}{1+1+1+1}=-\frac{6}{4}。$$

这意味着梅尔支出（损失）6/4。因为赌注是以美元计算的，所以1/4就代表25美分的钱。为了便于计算矩阵表中支付的款项，我们在下页引用的方格里的各个数字就代表着（平均）转手的25美分款额。

幸好，这个分析看来并不致使人厌倦：刚一开始，我们就发现了四个鞍点，分别对应于梅尔-（1，1）或梅尔-(1，3）策略对抗佩伊-（1，2）或佩伊-（1，3）的策略。因此，任何一个局中人都不应该在手里存有坏牌时押下较高的赌注进行投机。但是，在有好牌时梅尔可以减少赌注（而佩伊则按中等的）。

有鞍点的对抗的得失等于零，即游戏是公平的。考虑到

佩伊

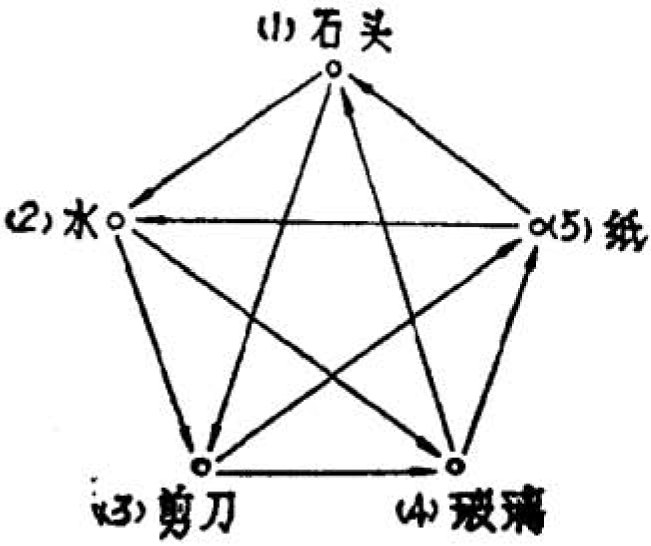
梅尔	1,1	1,2	1,3	2,1	2,2	2,3	3,1	3,2	3,3	各行极小值
1,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0*
1,2	1	0	−2	2	1	−1	−2	−3	−5	−5
1,3	1	0	0	2	1	1	3	2	2	0*
2,1	3	0	0	2	−1	−1	0	−3	−3	−3
2,2	4	0	−2	4	0	−2	−2	−6	−8	−8
2,3	4	0	0	4	0	0	3	−1	−1	−1
3,1	3	0	−1	2	−1	−2	2	−1	−2	−2
3,2	4	0	−3	4	0	−3	0	−4	−7	−7
3,3	4	0	−1	4	0	−1	5	1	0	−1
各列极大值	4	0*	0*	4	1	1	5	2	2	

对策的不对称及其支付矩阵表，这就多少有点意外。这个实例使我们认识到在分析寻常扑克游戏时可能遭遇的种种困难。

例二十五　大孩子的游戏

我们曾在第三章里研究过一种称为“石头——纸——剪刀”的儿童游戏。这种游戏可以用两种不同的方法改变为适合大一点的小孩玩耍的有五个因素的游戏。其一具有显然直

观的解，另一则没有。



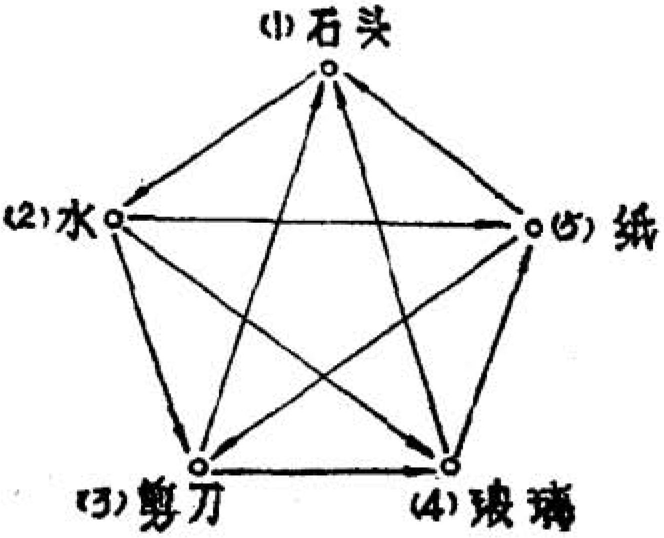
我们就称这游戏为“石头——水——剪刀——玻璃——纸”。每个小孩都明白：水能淋湿石头和纸张，剪刀比水和石头值钱，玻璃比水和剪刀脆弱，纸张比剪刀和玻璃柔韧，而石头则比玻璃和纸张粗厚。这些对比关系可藉右上图表示出来：（图上的箭头显示其制约方向）。假使相应地以1、－1和0来代表赢、输和平局，以数码代表图中的各种策略，那么支付矩阵表就具有如下形式：

红者

		1	2	3	4	5
	1	0	－1	－1	1	1
	2	1	0	－1	－1	1
蓝者	3	1	1	0	－1	－1
	4	－1	1	1	0	－1
	5	－1	－1	1	1	0

在徒劳无功地检验鞍点和优势后，我们采用了全为积极策略时的方法，它为每个局中人提供的解是1：1：1：1：1，即他们必须以相等的频率使用其全部策略。

如果变换一下三个箭头的方向（见下图），比如说，我



们推想：纸比水容易燃烧，剪刀能剪破纸张，而石头能砸坏剪刀，那么支付矩阵表形式就成为：

红者

		1	2	3	4	5
	1	0	-1	1	1	1
	2	1	0	-1	-1	-1
蓝者	3	-1	1	0	-1	1
	4	-1	1	1	0	-1
	5	-1	1	-1	1	0

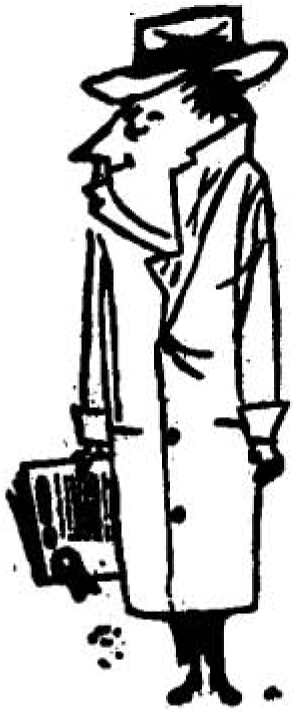
你们经过一番精心计算之后，一定会求出“石头——水——剪刀——玻璃——纸”游戏的解是3：3：1：1：1。

例二十六　法庭执行员

法庭执行员格里不时看看这扇门，又瞧瞧那扇门，企望

在斯基弗走出门时截住他，并把传票交给他。斯基弗的朋友斯科特这时也在房内，而且想帮助斯基弗。他们从未遇过如此倒霉的事，完全糟糕的是他们在人群中辨认不出格里。

他们可以经过任何一扇门走出房屋去，同时其中任何一个人都可以先走。在他们之中有人出现在格里正注视着的门口时，格里可以将传票递交给头一个人或是第二个人。然而，如果他试图把传票交给斯科特，那么斯基弗一从窗户望见这情况，便会由另一扇门溜之大吉。把传票交给斯基弗可以评估为有利法纪的1，而错递的情况则评为0。



格里有四种纯策略：他可以看住任何一扇门，他可以把传票交给或不交给他所看到的从门口走出的那第一个人。

斯基弗拥有更为丰富和复杂的策略集。其中两种策略是：他头一个走出某扇门。假如他采用了其中一种策略，那就不需要下述的任何解了。他还有四种策略，其中之一是：他派斯科特从某扇门出去，并注意观察此后的情况。假如格里把传票交给斯科特，那么他就从另外的门溜掉；假如没人走到斯科特跟前，那么他就必须随着他走，并且企望较好的结局。象这样由斯科特出现在正门或后门，同时随他经过同一门口出走或经过另一门口离开的形式构成的策略总共有四种。

最终，我们有了一个4×6对策。在各种纯策略都明确之后，再写出支付矩阵表已经并不困难。“正门”和“后门”表示斯基弗利用正门和后门，而“（正门）”和“(后门)”则表示是斯科特利用的同样内容。

斯基弗和斯科特

		正门 (1)	后门 (2)	(正)正 (3)	(正)后 (4)	(后)后 (5)	(后)正 (6)
监视	传票交给：	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
格里 正门	第一人 (1)	1	0	0	0	0	1
格里 正门	第二人 (2)	0	0	1	0	0	0
格里 后门	第一人 (3)	0	1	0	1	0	0
格里 后门	第二人 (4)	0	0	0	0	1	0

我们惯用的解法极其好用，因为这里拥有良好的混合策略中的四种积极策略。在本对策中有若干基本的混合策略：斯基弗可以用对于组成4×4矩阵表的任何四种策略来说是1:1:1:1的相对频数来进行对策，这种矩阵表在每行和每列都包含有一个单位，比如说，策略－3、－4、－5和－6就是这样。

格里的最优混合策略将为1:1:1:1，而对策的得失等于1/4有利于格里。假使斯基弗单独一人在房内，则对策的得失会提高到1/2。因此，斯科特的协助是极有价值的。

例二十七　猜币游戏

参与此游戏的有两个人，各人在拳头里或是握着硬币，或是没有，然后由各人猜测对方握在拳头中的钱数是多少。四种策略对各局中人都是可行的。

1.拳中未握钱，认为数额等于零；

2.拳中未握钱，认为数额等于1；

3. 握着一个钱，认为数额等于1；

4. 握着一个钱，认为数额等于2。

我们把没有看作零，而把蓝者的赢和输相应看作+1和-1，便有下述的对策：

红者

蓝者	1	2	3	4
1	0	1	-1	0
2	-1	0	0	1
3	1	0	0	-1
4	0	-1	1	0

在这个对策中既无鞍点，亦无优势，而我们采用的在全部是积极策略时应用的方法提供给全部策略的相对频数是零。这样一来，我们这儿就产生了一些麻烦：应该存在某种包含在4×4对策之中的小型的对策，其解从整个来说能够满足全部对策。在包含在基本对策之内的2×4对策中存在有对策

红者

蓝者	1	2	3	4
2	-1	0	0	1
3	1	0	0	-1

很容易便能得出结论：蓝者-2和蓝者-3策略必须以1∶1的相对频数行事，而红者则必须以1∶0∶0∶1的相对频数运用其策略。这个解同时也就是整个对策的解。

不过，请你注意：所求出的最优混合策略并不是唯一可能的，因为对2×4对策（它同样地也包含在基本对策之列）来说：

红者

		1	2	3	4
蓝者	1	0	1	-1	0
	4	0	-1	1	0

它同样也有一个能够满足初始对策的解，即对蓝者和红者相应为1:0:0:1和0:1:1:0。

这样，现在我们知道有两种引导本对策的方法：混合策略-1和-4或者混合策略-2和-3，同时，不论你选出的是哪一组策略，你都应该依从几率相等的抽签所指示的方法把它们混合起来。同样明显的是，我们可以进一步研究下去，并且得到以两种混合策略为基础的更一般的解（通解），也就是把所有四种策略任意混合使用，这唯一的条件只是使蓝者-1策略的相对频数正好同蓝者-4策略的相对频数一样，而蓝者-2的与蓝者-3的一样。（对于红者而言，情况亦相同。）这样，7:3:3:7的混合策略就象3:7:7:3的策略或者类似的数字组合一样对任一局中人来说都是好策略。

我们首次提醒你注意对策可能拥有不止一种的最优混合策略，但实际上，在前面我们已多次与这种特性有过接触。那是在（对策）存在许多鞍点，同时有许多纯策略是最优策略的时候。这条原则是普遍的和显而易见的：假如对策有若干种解，并且其中每种解不是纯策略，就是混合策略，那么这些解同样也可以由任意一种方法混合起来。

例二十八 “管理方面的”抉择

匪徒的头目刚刚在使用万能钥匙方面显示出技巧，同时已经把双手伸入保险柜了。他突然呆住不动了，因为这时新匪徒塞西·虎正从口袋里掏出一件东西并把一只手藏到桌子下面去。

“这是怎么回事？塞西。”

“事情是这样的，波里。假使你能够送一点礼物给我，对我加入你们这一伙表示表示祝贺的话，那么我将十分感谢你的好意。你应当把你抢夺来的全部财物连同你的玩具手枪统统交给我。别浪费时间猜想我手上的家伙了。这只不过是……”

也许，塞西打算说出的是“手枪”。但在另一方面，他原本可能说出的是某种无害的东西，如烟斗。无论如何，波里正面临着一种管理上的复杂问题。这里有哪些可能性呢？

波里感到金钱在这种情势中起比较小的作用。更重要的赌注是他的性命和威望。他从最悲观的假设开始，列举出以下的各种可能性：

1.跟手枪发生冲突，并被击毙；

2.受到塞西说的烟斗的恐吓，那东西是烟斗；

3.受到塞西说的烟斗的恐吓，而那东西是手枪；

4.受到塞西说的手枪的恐吓，那东西是手枪；

5.受到塞西说的手枪的恐吓，而那东西却是烟斗；

6.跟塞西说的烟斗发生冲突，那东西是烟斗；

7.跟塞西说的烟斗发生冲突，而那东西却是手枪。

波里决定按照从0扩展到10的级差来评估这些可能性。他把最悲观的可能性(1)评价为0，而把自己的胜利〔可能性〈7〉〕评价为10。要为其它的可能性确定出得失是一件会使你扫兴的不合宜的任务。不过，我们要记住：波里感受的苦恼也恰恰是这样的①。他决定把他完全受愚弄的情况评价为5分，其它情况分别评为6、7、8和9分。塞西有四种策略：他可以掏出或不掏出手枪，他也可以说或不说出“手枪”。波里同样有四种策略：他可以信或不信塞西说的话，或者他可以相信手枪的说法，而不相信其它的说法，或者恰相反。结果获得一个对策：

		塞西			
		枪“枪”(1)	枪“烟”(2)	烟“枪”(3)	烟“烟”(4)
波里	信枪，信烟　(1)	7	0	6	9
	信枪，不信烟(2)	7	8	6	5
	不信枪，信烟(3)	0	0	10	9
	不信枪，不信烟(4)	0	8	10	5

这里，枪和烟表示的是手枪和烟斗，

“枪”和“烟”表示塞西的说法（“手枪”或“烟斗”），信或不信表示对于塞西说法的相信或不相信。

这样，比方说，塞西的第二种纯策略是拿出手枪，却说他拿

① 在从第235页开始的第五章的两节内容中会提到测定或是评估支付值的重要性以及在这种场合所需精确性的问题。——作者原注。

的是烟斗。波里的第一种纯策略是他相信塞西的说法，而这乃是他终生最后一次的行动。

解可用标准的方法求出。我们试图找到4×4型对策的解，但除了烦恼之外是一无所获。因此我们来找找3×3型的解。鉴于波里-3策略和塞西-3策略看上去似乎没有吸引力，我们便将其消去，而这样做则带来了成功。对波里而言，解是7:17:0:4的相对频数。对策的得失等于6。塞西采用0:1:0:2的相对频数时，也有可能使支付达到这个数值。（波里除7:17:0:4的解以外，还有其它的解1:3:0:0和3:21:4:0。）

有一个事实可能使人感到惊讶：波里不遵循的仅只是波里-2策略，即相信“手枪”，而不相信“烟斗”。这说明他珍惜自己的威望。假如他不如此珍惜自己的威望，即他不把其支付值等级评定得那么高的话，他本可以将除零以外的全部支付值按接近10分类，但同时又保持着它们在等级上的序列，那样，波里-2策略的相对频数是可能增长的。比如说，假定采用支付值级差

0，9.5，9.6，9.7，9.8，9.9和10

（即只给威望的因素微弱的数值），那么本例的解将为291:9411:0:192或者实际上为3:99:0:2。另外一种解将为3:99:0:0。这样一来，甚至在这种情况下，他也不应该盲目地只依从第二种策略。在本对策中，塞西必须采用0:4:0:98的混合策略，即他始终必须说他手里拿的是烟斗，同时这几乎始终都是真话①。

---

①本例应作为非零和对策来解，因为塞西感兴趣的是钱财，而不是动摇波里的威信。因此，严格地说，本对策中塞西的支付矩阵表跟波里的支付矩阵表并不是完全一致的。在以后内容（见第261页）中对这类对策有简短的分析。——俄译者注。

例二十九　伯罗托上校的问题

先前曾担心同红者（红军）接不上火的战斗部队的指挥官，此刻却正在为他的连队同敌军接触太多而感到担心，因为在两个前沿哨所，他们已同敌人战斗十分钟了。

当他拟定这次作战计划时，参谋部侦察处把敌军兵力估计为600人，但根据现在他自己侦察来的情报看来，敌军却有1000人（大约五个连）。因此，他拥有的两个步兵营（六个连）现在总共只有一个连的优势，而不是他原先指望的两倍的优势。他下令："要以我方最少的损失歼灭最多的敌兵。"联合司令部的代表，被指派来在战时负责部队的一位团长在指挥官向自己的营、连长们宣读这个办不到的命令时，暗地里得意地微笑着。这促使指挥官要让司令部的代表们参观一下部队的"嗜好"愈加强烈了。他的"贝克"和"多克"两个连在距离主力不远的东北和西北方向上都相应地同敌军发生了冲突。余下的四个连队作为预备队，可以用以支援任一地点。他趁着等待营指挥官的时候，沉思着：假使责任落到这位由联合司令部来的军官（此刻他正在一棵树上磨蹭自己的脊背呢）身上，他将采取什么对策呢？

"我敢发誓，他必定不会如此安闲自在的。"这位指挥官想道。

"团长，您对此的看法如何呢？据您看，这不是很象第二次普尼战争时期的某个偶然事件吗？"

"这的确颇为有趣，不过这种局势确实使我想起比普尼战争更久远些的一些东西。你曾经听说过对策论吗？"

"一无所知。"

"有一年夏天，我曾经跟一伙朋友一块儿度过些时间。

在谈论其它事情时，他们也经常顺便谈到跟军事行动有若干关系的数学问题，即对策论。他们探讨过一个所谓‘伯罗托上校的问题’的实例。请你原谅，这伙朋友是相当不恭敬而且不守纪律的人……不管这样，这个伯罗托几乎跟这样的情势冲突起来了。”

“对策论究竟向他提出了什么建议呢？进行谈判吗？”

“比谈判还要糟糕！它断言说——请你记住，这不是我的想法——你必须注视这只蚂蚁，不，是正在您地图上爬动的那只。等它一爬到油斑，就请您看一看您手表上的秒针。如果秒针指着6或更少，那您则应该把自己的兵力平均分派给有危险的两个据点。如果秒针指着6到30之间，那就把全部预备队交给邓；如果秒针指着30和54之间，那就把预备队给加里；最后，如果秒针指着54和60之间，那么您就要寻找另一只蚂蚁。”

“真是见鬼！……让我们试试这样做吧。”

现在，让我们细心地研究一下分析情势的过程。蓝者（蓝军）拥有6个连，而红者（红军）则有5个连。他们在两个据点进入战斗。对蓝军而言，下述可能性是公开的：他们可按5:1、4:2、3:3、2:4和1:5的比例分派自己的兵力。而红军可按4:1、3:2、2:3和1:4的比例分派其兵力。我们假定在兵力相同的情况下获平局，兵力较多的一方则取胜。支付值等于敌军被歼灭的连队数减去自身的损失数。这看来是符合情势的特点，并且同蓝军指挥官发布的，严格地说是荒谬的命令没有矛盾。支付矩阵表将是：

红军

		41	32	23	14
	51	4	2	1	0
	42	1	3	0	-1
蓝军	33	-2	2	2	-2
	24	-1	0	3	1
	15	0	1	2	4

（我们用数码51表示按5∶1比例配置兵力，其余类推。）

求解是颇为困难的。但无论如何我们可以来试一试解以下4×4对策：

红军

		41	32	23	14
	51	4	2	1	0
蓝军	42	1	3	0	-1
	33	-2	2	2	-2
	15	0	1	2	4

这个对策是由消去蓝军的第四种策略而得到的。我们在全部策略都是积极策略时使用的方法提供出可以满足初始对策的解，对蓝军而言，正是4∶0∶1∶0∶4，而对红军而言，则是3∶48∶32∶7。根据对策的对称可以看得出：假如消去蓝军的

第二种策略，那就能获得另外一种类似的解。象先前一样，这引导出蓝军4:0:1:0:4的解和红军7:32:48:3的解。

虽然这除了使相对频数较为好阅读，并能够组合① 红军的这两种解，得到其形式为10:80:80:10，即1:8:8:1的最优策略之外，并没有特殊的意义。这些结果可以写成以下的形式：

红军

蓝军	41	32	23	14	蓝军的相对频数
51	4	2	1	0	4
42	1	3	0	−1	0
33	−2	2	2	−2	1
24	−1	0	3	1	0
15	0	1	2	4	4
红军的相对频数	1	8	8	1	

因此，蓝军必须以8 : 1的相对频数偏重于悬殊兵力配置。他们不应该采取折中的兵力配置。另一方面，红军恰恰相反，他们必须更频繁地依照几乎均等的配置，而较少用不均等的兵力配置。

对策的得失（有利于蓝军）等于14/9，即在一至两个连队之间。蚂蚁、地图和秒针的事件乃是为取得蓝军所需要的4:1:4的相对频数而必不可少的。

我们这个例子还可继续研究下去。我们假定在两场战斗

①请见第233页的关于“多种解”内容。——作者原注。

之后，在余下的有生力量之间又发生了第三场战斗。我们可以提出这样的问题：指挥官们必须怎样拟定自己的初始战斗计划，才能在战斗结束时获得最佳的战果？

按照我们采用的规则，在最后一场战斗中能投入最大数量兵力（连队）的一方将可克敌制胜。因此，最终的支付值将等于敌军原有的兵力①减去我方在头两次战斗中损失的兵力②（连队）。如果双方剩余兵力相等，则都不再有更大的损失。根据这些规则，以初始的矩阵表为出发点，我们便获得一个具有所形成的新局势特性的对策：

红军

		41	32	23	14	蓝军的相对频数
蓝军	51	5	4	4	4	10
	42	5	5	3	-1	0
	33	-5	5	5	-5	1
	24	-1	3	5	5	0
	15	4	4	4	5	10
红军的相对频数		2	19	19	2	

这里红军的解最终又是由两种解组合而成的，即1:7:12:1和1:12:7:1。对策的得失等于85/21。

把这些结果同前面的结果相对照，我们可以看得出：这种统观全局的情势要求蓝军更进一步集中优势兵力于一仗。有利于集中兵力的相对频数现在已形成20:1，而不是8:1。

① 在战斗结束时，他们被全部歼灭。——俄译者注。
② 在最后一场战斗中，获胜的一方未受损失。——俄译者注。

例三十 “莫拉”游戏

有一种游戏叫做“莫拉”。而它究竟有多少种叫法，并不是我们发明的。借助这个游戏，我们既可明白对策论的长处，又可了解它的缺点。其长处是：局中人需要对策论协助他们选择策略，因为他们偶然地侥幸想到一个好的对策方案的可能性是很小的。其缺点是：为了获得这个好的策略，需要一番笨拙的演算。

游戏是这样的：各局中人伸出若干手指，与此同时猜出对方伸出几个手指。伸出的手指可以是一个、二个或三个。只要一个局中人讲对了对方伸出的手指数，那么他的收入就等于该局中两个局中人伸出的手指的总数。其余场合的支付值等于零。（不消说，结帐是以钱额计算，而不是以手指计算的。）这样，如果蓝者伸出三个手指，而且说出“一”，与此同时，红者伸出一个手指，而且说出“二”，那么蓝者就赢了，因为他猜对了。他这次的收入是4个支付值单位。

各个局中人可以伸出一个、二个或三个手指，同时相应地可以说出“一个”、“二个”或“三个”手指。因此，各个局中人都具备九种可能性，即拥有九种纯策略。我们用双重含义的数码标记这些策略，比方说32，第一个数字指示的是局中人伸出的手指数目，而第二个数字表明的是他说出的手指数目。用相似的方法标记出这些策略，并且统计出其支付值之后，我们可以把莫拉游戏写成下页的9×9矩阵表。

看来在此处最有效的是凭天才和灵感了，因为直接的计算是极为错综复杂的。我们一般的方法能提供对所有的策略频率为零的形式的答案。假如把这种答案直接应用于9×9

红者

蓝者	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	0	2	2	−3	0	0	−4	0	0
12	−2	0	0	0	3	3	−4	0	0
13	−2	0	0	−3	0	0	0	4	4
21	3	0	3	0	−4	0	0	−5	0
22	0	−3	0	4	0	4	0	−5	0
23	0	−3	0	0	−4	0	5	0	5
31	4	4	0	0	0	−5	0	0	−6
32	0	0	−4	5	5	0	0	0	−6
33	0	0	−4	0	0	−5	6	6	0

对策，那就是说任何局中人都不想进行对策了。实际上，这是表明必须消去一个或几个纯策略，此后应该去寻求简化的对策的解。

我们必须观察研究的有9个8×8对策（假如我们不利用对策的对称性，这样的对策原可达81个之多）、36个7×7对策和84个6×6对策。我们不走这条路。

由于同数论有关的原因，同时也由于对答案的某些了解，所以我们就把注意力集中在126个5×5对策上，这些对策按其策略说是对称的。经过两次尝试后，我们总算幸运地找到了一个所需的对策。它是在消除第一、第四、第六和第

九种策略之后获得的：

		红者				
		12	13	22	31	32
蓝者	12	0	0	3	−4	0
	13	0	0	0	0	4
	22	−3	0	0	0	−5
	31	4	0	0	0	0
	32	0	−4	5	0	0

利用全部策略是积极策略时的解法，我们获得（在用公因子约过后）如下的频率：

0：5：4：3：0。

我们经过验证可以确信：这个解不仅可以满足这5×5对策，而且可以满足整个9×9对策。

因此，在莫拉游戏中采取下述方式进行对策是聪明合理的。

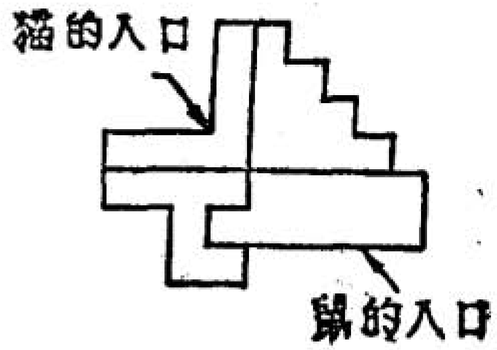
策略：　　11　12　13　21　22　23　31　32　33，

相对频数：0　0　5　0　4　0　3　0　0。

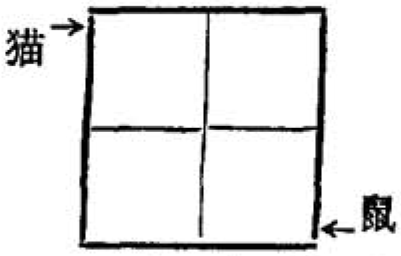
换句话说，应该使用这样一些策略：1，伸出一指，说出三指；2，伸出两指，说的也是两指；3，伸出三指，说出一指。所有这些策略应当相应地按相对频数5：4：3使用。对策的得失等于零；当然，这样的对策是廉洁的。我们认为，这个对策值得教给你的朋友们，因为它的解是很容易记住的，但想凭直观方法求解却是很困难的。

例三十一　迷　　宫

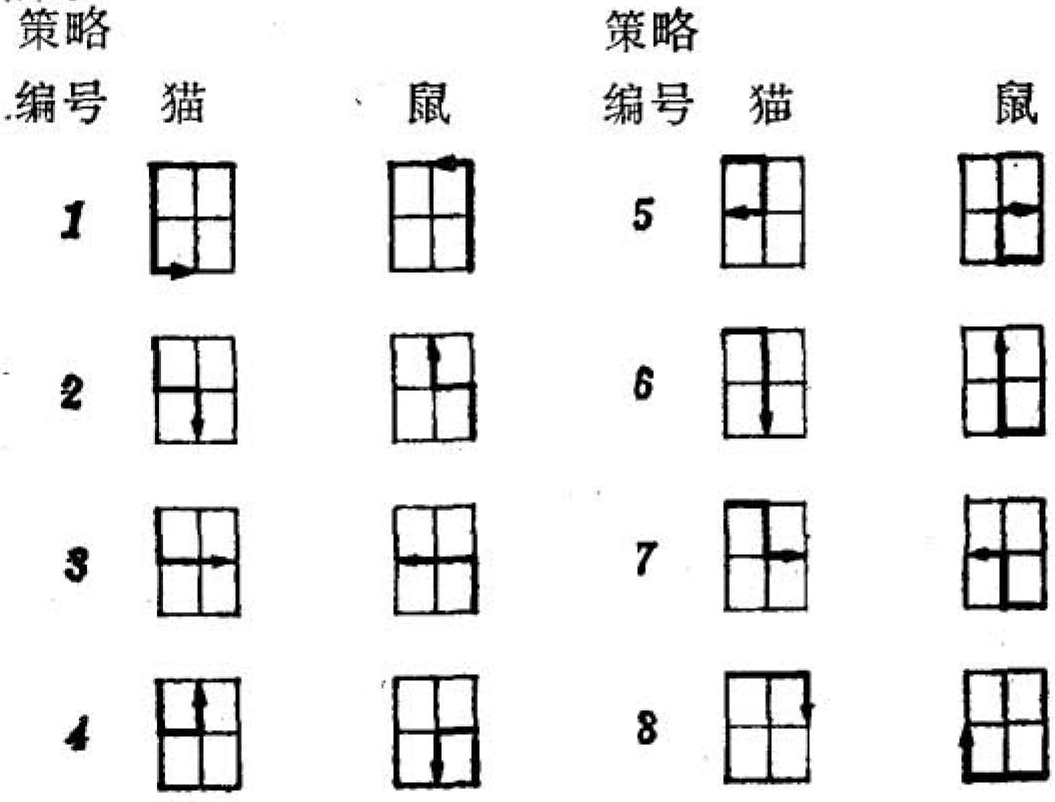
一只猫和一只鼠相继坠落在如图所示的一个无门无窗的迷宫中。它们可以绕过角落，但无权再返回去。它们跑动的速度是相等的，同时给它们的时间够绕着迷宫跑过四分之一。此后，假使老鼠仍安然无恙，则可认为它已经死里逃生了。它们应采取什么样的策略呢？



首先，它们要立即领悟到它们所落入的迷宫等同于如下的迷宫：



因此，它们拥有八种纯策略。这些策略可以用如下的图式表达出来：



假如我们将“猫逮住鼠”的结局规定为等于1个单位的支付，并把“猫放跑鼠”的结局规定为等于零的支付，那么猫则成为企望得到最大支付值的局中人，而鼠则成为企望支付值最小的局中人。把各种纯策略做过对比之后，我们编出支付矩阵表

		鼠 1	2	3	4	5	6	7	8
猫	1	0	0	0	1	0	0	0	1
	2	0	1	1	1	1	1	1	0
	3	0	1	1	1	1	1	1	0
	4	1	1	1	1	1	1	1	0
	5	0	1	1	1	1	1	1	1
	6	0	1	1	1	1	1	1	0
	7	0	1	1	1	1	1	1	0
	8	1	0	0	0	1	0	0	0

我们立刻发现猫的第五种策略比第一、第二、第三、第六和第七种策略占优势，而第四种策略又比第八种策略占优势。除此之外，鼠的第一种策略从属于其第五种策略，而第八种策略又从属于第四种策略，同时鼠的第二、第三、第六和第七种的策略是相同的。因此，对策可以明显地简化为：

		鼠	
猫	1	2	8
4	1	1	0
5	0	1	1

这样的对策有一般的解：猫必须以相同的频率使用其第四种和第五种策略，而鼠也必须这样混合使用其第一种和第八种策略。

再返回到我们用以表示纯策略的图式时，我们可以意识到：猫应该绕小圈，而鼠则应该循迷宫的外廊跑。

例三十二 梅 琳

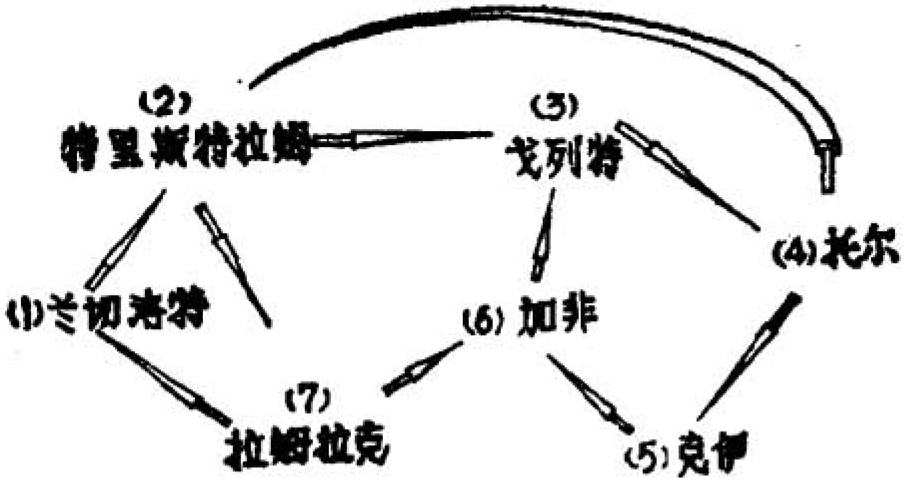
“我很需要你帮帮忙，”珍妮弗拉说了起来，“艾泽莉达这个坏家伙定下了一个令人厌恶的惯例：如果孩子们在骑士比武时嬉戏，那么胜利者就要围上她的头巾。可是，我的冠军却时常在地上就结束了比赛。这是违反隶属系统的，应予制止。”

梅琳的左手变成了一只哇哇鸣叫的癞蛤蟆。他稍微打了个哆嗦，在安乐椅里伸了伸懒腰。

“请原谅，亲爱的，我有点分神了……哦，哦，是骑士比武。这一段时间我完全没去注意他们。现在骑士们能成功的机会如何？”

“唉，这可复杂极啦，”珍妮弗拉哼哼地说着，“现在我们城里还剩下七位上等的骑士。他们多数人彼此会打成平局。但有若干人无疑能打败其它人。有充分的根据估计到兰切洛特会打败特里斯特拉姆，特里斯特拉姆会打败戈列特和拉姆拉克，拉姆拉克会打败加非，我期望他还会打败兰切洛特。戈列特会战胜托尔，托尔会战胜克伊先生和特里斯特拉姆。不过，克伊比加非占上风，而加非又比戈列特占上风。这简直是一场大混乱——他们在某些方面是那么坚忍不拔，但是……”

“然而，他们不是传递的①，”梅琳一边低声含糊说着，一边画下了这样的示意图：



“从托尔到特里斯特拉姆的这个箭头不很美观，但问题不在于此。珍，请再忍耐一会儿。如此紊乱不堪的情况堪比

①在数学中具备下述特点的调整关系称为“传递的”（或“可迁的”）关系：若兰切洛特赢特里斯特拉姆，且特里斯特拉姆赢拉姆拉克，则兰切洛特赢拉姆拉克（若a＞b和b＞c，则a＞c）。这种关系在梅琳的示意图中不存在。——俄译者注。

得上怪诞的梦境啦。”

梅琳坐下来，闭起了双眼。珍妮小姐一动也不动地坐着，梅琳心爱的小枭（此刻它正在他头发丛中筑窝呢）瞪圆眼珠探究地盯着她。

终于，老头子精神一振，坐直了身子。

“我的天哪！”他出了口长气。“在我到二十世纪去游览的时候，那怕只是短期的，也总感到自己精疲力尽了。虽然如此，我还是发现了我所寻找的东西。有个玩意儿叫做……喏，姑且称之为循环赛理论吧！我不敢用太多的细节难为您。您必须做的事儿就是：把几颗记上骑士大名的石子投放到一只瓶罐里。此外，非常要紧的一件事是：要往罐里抛洒上些独角兽①的细角粉。代表克伊和加非的两颗石子别丢到罐子里。在你想挑选骑士的时候，就请您摇晃这只罐子，并把它颠倒两次，其中一次是朝向后面的，再由罐子里随便取出一颗石子来。这样，您至少就能保持住自己同艾泽莉达抗衡时成功的机会啦。”

“哦，这真是妙极了！梅琳，我该如何感谢您呢？请您说说，您想得到什么？”

“嘿，”梅琳说，“您要知道，对我来说，几乎任何一种愿望都是不用花钱就可以满足的。”

刚一说完这话，他就把突如其来地出现在他手中的一块熏鲑鱼送到嘴里。他掐下一块，然后又说：“嗯，理所当然的。您从这门出去时，一定能为我跳个翻筋斗舞的。我将乐意看到在没有我强迫的情况下，你是怎样表演的。”

如果用零来表示平局，用1和－1来表示珍妮弗拉的赢和

---

①这是神话传说中一种身上有花纹的兽类。——俄译者注。

输，那么支付矩阵表的形式将为

艾泽莉达

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	0	0	0	−1
2	−1	0	1	−1	0	0	1
3	0	−1	0	1	0	−1	0
珍妮弗拉 4	0	1	−1	0	1	0	0
5	0	0	0	−1	0	1	0
6	0	0	1	0	−1	0	−1
7	1	−1	0	0	0	1	0

本表中各种策略的编码代表其对应的骑士。

解这个对策是简单的，但又是令人厌烦的事情。在依次检验过包含在这对策中的全部7×7和6×6对策之后，您最终得到了一个以策略－1、－2、－3、－4和－7为基础的5×5型对策。该对策的解是：应以相等的频率采用所有五种策略。这个解同样地也能满足我们的初始对策。因此，两位女士应该运用如下的混合策略：以1：1：1：1：0：0：1的相对频数来选骑士。

关于4×4对策解法的结论

现在，让我们把在4×4对策和有更多种策略的对策方面的知识做个概述吧。我们一般的方法是首先寻找鞍点。假如

存在着鞍点，那么，我们可以知道：我们的最优策略就是采用由鞍点确定的纯策略。假如对策中不包含鞍点，那么，我们就要从矩阵表中消去蓝者全部的从属策略和红者全部的优势策略。遗憾的是，我们对优势的检验常常化成了简单平淡的浏览，以致可能在许多场合导致犯错误。这对于我们称之为有潜在优势的情况来说，尤其是这样。这里讲的有“潜在的优势”，指的是某些种纯策略的组合比较某一种纯策略占优势，或者是从属于这一种纯策略。在尽我们可能的限度肃清矩阵表之后，无论如何，我们要假定自己所有的策略都是积极策略，并且要力图用非常简单而可靠的方法确定最优混合策略。由于一路上陷阱遍布，我们很有可能直到最后也得不到所需的结果。

这些难点是怎样伪装隐蔽起来的呢？它们拥有形形色色的存衣和一串串的假胡须。先前，在3×3对策中，我们已经遇见过一个特例：蓝者各种策略的相对频数似乎全都等于零，但这答案显然是错误的。假如仅仅是对某些策略来说相对频数等于零，但不是同时对所有的策略而言的话，那么答案有可能是正确的。这样一种事实对于验证解的正确性是很有益处的：即蓝者所有策略的相对频数的总和（未以公因子约过）必须等于红者所有策略的相对频数的总和。假如它们（两数）不相等的话，那么不是方法上的毛病，就是算术（运算）上的错误。因为你还不知道这两者中哪个是真正的原因，所以你应当非常认真细致地检查整个算术演算（过程）。此外，当我们统计采用最优策略对抗对手的各种纯策略的平均支付值时，麻烦就有可能显露出来：因为这时候也许会发现某个局中人获得的（假定双方都正确地进行对策的话）更大的收入或者是遭受了更大的损失。

每当你碰到这种令人烦恼的情况，并且又确信算术演算是正确的时候，补救的办法只有一种，而且应该说是相当麻烦的：你要消去某些策略，解出所得的简化的对策，还得为初始的对策试验这个解。假使对策是很大型的，那么你就得动员起自己全部直观法的招数，抱着成功的期望，小心谨慎地行事。否则，你就得悄悄地退出战场，因为有可能遭遇到前所未见的情势，比方说，在这个特例中，就有数量庞大的对策等待着受检验。

如果在初始对策中，或者在根据优势原则经过简化留下的对策中，某一局中人比另一局中人拥有更多的纯策略，那么它就不需要再使用什么新方法。两个局中人必须拥有的最优策略是由若干纯策略组成的，而且其数目不超过那个拥有较少纯策略的局中人所拥有的纯策略数。由此可以得出结论：为了运用全部策略都是积极策略时的方法，就必须从拥有较多策略的那个局中人掌握的全部策略中消除去一些策略，使得对策能够有个正方形的矩阵表（方阵）。因此，你在试图求出5×10对策的解之前，先必须把它简化到5×5型、4×4型或者甚至更小型些的对策。由于这里存在许多种可能性，所以这种简化程序看来也是极其令人厌烦的；也许，你甚至会拒绝去求解。

我们以这些振奋军心的话作为结束语，同时祈求老天爷保佑先生的好事成功。现在，我要建议你们之中最勇敢的人来完成若干练习题。

练　习　五

确定下述对策的相对频数和得失。

1.

红者

蓝者	1	2	3	4
1	7	6	0	2
2	3	8	2	5
3	1	0	2	2
4	3	0	1	3

2.

红者

蓝者	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	8	7	6	5
3	7	6	5	4
4	0	1	2	3

3.

红者

蓝者	1	2	3	4
1	3	5	4	3
2	3	4	2	1
3	1	1	3	4
4	0	5	2	2

4. 红者

蓝者	1	2	3	4	5
1	2	2	0	1	0
2	1	0	−1	1	−2
3	1	3	−1	4	−1
4	4	2	0	1	0

5. 红者

蓝者	1	2	3	4
1	2	3	1	4
2	1	2	5	4
3	2	3	4	1
4	4	2	2	2

6. 红者

蓝者	1	2	3	4
1	1	7	0	3
2	0	0	3	5
3	1	2	3	0
4	6	0	2	0

7.

红者

蓝者	1	2	3	4
1	8	0	6	7
2	3	3	4	8
3	1	5	9	2
4	3	6	3	1

8.

红者

蓝者	1	2	3	4
1	3	4	0	3
2	5	0	2	5
3	7	3	9	5
4	4	6	8	7

9.

红者

蓝者	1	2	3	4
1	6	3	0	0
2	0	0	5	1
3	1	1	2	0
4	1	1	7	3
5	1	1	0	7
6	0	0	2	0

10. 红者

蓝者	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	0	1	6	0	0
2	7	2	0	0	2	0	1	5
3	0	3	2	3	3	2	3	3
4	3	0	8	5	0	0	4	1

11. 红者

蓝者	1	2	3	4	5
1	0	1	0	2	0
2	3	0	0	1	2
3	0	0	2	1	2
4	1	3	0	0	1
5	1	2	3	1	0

12. 红者

蓝者	1	2	3	4	5
1	3	3	4	4	8
2	8	0	6	8	7
3	1	5	9	5	2
4	3	6	3	1	1
5	5	5	0	3	0

13.

红者

蓝者	1	2	3	4	5
1	0	4	8	4	1
2	2	5	2	0	0
3	1	4	0	8	4
4	7	−1	5	7	6
5	2	2	3	3	7

14.

红者

蓝者	1	2	3	4	5
1	2	7	7	6	7
2	6	6	6	9	2
8	9	4	5	5	9
4	4	9	3	8	6
5	7	7	9	3	6

15.

红者

蓝者	1	2	3	4	5
1	3	4	0	3	0
2	5	0	2	5	9
3	7	3	9	5	9
4	4	6	8	7	4
5	6	0	8	8	3

16.

红者

蓝者	1	2	3	4	5
1	2	2	5	1	3
2	0	0	4	3	4
3	1	2	1	0	6
4	5	4	5	0	5
5	3	1	1	6	6

17.

红者

蓝者	1	2	3	4	5
1	5	5	4	5	2
2	5	4	7	1	6
3	2	3	4	1	7
4	3	6	7	3	2
5	4	4	3	0	2

18.

红者

蓝者	1	2	3	4	5
1	6	4	9	3	7
2	0	2	9	8	5
3	5	3	4	2	4
4	1	6	2	1	8
5	1	6	1	3	6

19.

红者

蓝者	1	2	3	4	5	6
1	6	4	−2	4	0	5
2	1	4	1	2	4	6
3	1	1	4	1	2	−1
4	0	0	3	−1	1	3
5	3	2	3	−2	3	−2
6	1	−1	−1	4	4	−2

20.

红者

蓝者	1	2	3	4	5
1	−2	3	1	−1	1
2	−1	−3	1	3	0
3	0	3	−3	−1	1
4	3	−3	1	−1	0

21.

红者

蓝者	1	2	3	4	5	6	7
1	8	3	1	3	2	5	3
2	6	6	0	0	2	4	1
3	0	3	5	6	6	7	6
4	6	4	9	3	1	0	6
5	1	6	4	4	3	5	6
6	7	8	2	1	5	0	0

22. 红者

蓝者	1	2	3	4	5
1	3	1	4	1	6
2	6	3	1	4	1
3	1	6	3	1	4
4	4	1	6	3	1
5	1	4	1	6	3

第五章　各种意见

这一章好似一家百货商店。你在本章内将发现对策的一些解法，同时还将看到对一些问题的简明扼要的评语。倘若要详尽地探讨这些问题，则势必使自己大大超越我们编写此书时拟定的范围。其中涉及的某些问题先前已经如幽灵般瞬息间出现在我们面前。这种怪事一般都发生在从前，由于我们勘查的隐密处所阴森晦暗，所以各种幽灵全现形了。

我们首先要说到的问题，虽然与我们的方法完全背道而驰，但从某种意义上讲，却正是前一章的合乎逻辑的继续。

近　似　法

在前面数章里，我们披荆斩棘，步步深入越来越复杂的对策。最终，我们达到了一个极点，可以有把握地说：我们已经知道怎样解出任意数值的对策了。确切些说，我们已经掌握了求解的各种方法，如果这些方法适用于一个已经列举出全部策略及支付值的对策的话①。这个事实的本身就足以使你产生深刻的印象，以致彼此恭喜道贺。

在此之后，我们应该继续前进，并且承认总的状况仍是极为令人失望的。我们的状况不妨同一位财政部官员的状况做个比较：这位官员打算把每张一美元的纸币逐一地点算好以偿还国债，并假定点钞票的速度是每秒一张，当然这是完

①以这种形式提出的对策一般称为“正规型的对策”。——俄译者注。

全实际的、可以理解的业务手续。然而，对我们的一位公务员来说，若要完成这项工作，却需要耗费四万年（其中已考虑到休假、生病以及每周四十小时工作制）的时光呢。当各个局中人可以使用的策略数在从四到十的范围内时（只要估计到你的直观能力和运气，就可以规定出精确的数字），我们所必须计算的步骤就渐渐形成极其巨大的数目。比方说，在一个10×10对策中就包含有超过四万个的4×4型对策。

鉴于这些可能发生的困难（甚至只是在那些比10×10对策较为容易求解的对策中发生的困难），在接到要求精确解答出其（矩阵）阶在10×10和100×100之间的对策的任务时，就连以对策论为职业的人也难免谈虎色变。他的处境确实很可怕。要说明这是怎么回事，只需讲一点就足够了：包含在130×130型对策之中的最低阶的对策的数目大致等于一的后面带有七十八个零。这个惊人的巨数恰好与爱丁顿①计算出的宇宙间拥有的正质子数的著名天文数字相一致。

我们所要求的内容显然是过多了。但科学的理论不应该以我们眼前未能解答的问题为限，尽管严格地说，我们还不可能检验包含在一个大型对策中的所有最低阶的对策。因此，我们或者是需要一种更强有力的分析方法，或者是对解的要求不能太严格。由于我们这一类人都害怕数学，所以宁愿取后者，假如我们降低对精确解的要求，并且只限于近似的解，那么状况就会有所改善。

①阿塞·斯坦利·爱丁顿（1882—1944年），英国天文学家。——汉译者注。

采取这样的妥协办法并不是什么新鲜事，而且，除此以外，我们的各种方法在实际效益方面也没有什么损失。这种情势可以跟如下一个人的处境相提并论：人家给了他一长条木板、锯子和卷尺，并且吩咐他把木板条锯成五段，使它们构成一个带有对角线斜撑的正方形，同时所有锯下的木板条必须彼此配合得十分精确。假如他是数学家，那么这个可怜人永远完不成这个任务，因为这条斜撑应该是正方形边长的$\sqrt{2}$倍，然而这个数字在哪一把卷尺上也没法标记出来。不过，如果他剥去这种数学的外装，同时也放弃对锯出木条要配合十分精确的要求，那么，他必定会锯出能充分满足合理要求的木板条来。

开始讨论近似法问题的时候，我们应该先采用初步的解。我们有没有兴趣去寻找一种自然而然使我们想到最优策略的混合策略呢？并不一定！虽说好的形式常常一看上去样子就好极了，例如说在英国的板球竞赛时。但是，我们应该只注意去获得对策的得失的近似值。这个约定的条件赋予我们某种自由，由于可能存在许多保证足够好的支付值的策略，而如果我们要想方设法使策略显得更好看的话，那么我们要努力达到的只是减小这些支付值。这样的策略越多，就越容易从中把它找出来。

现在，我们要叙述一种方法，它既是相当有效的，同时又是具有充分数学根据的。你可以把它看作是离散的各局对

策的序列。每个局中人在每一步骤中都采取一种考虑到其对手迄今为止所采取的全部步骤中据认为是最优的对抗步骤。可以随便地举出一个具体的矩阵表为例子，最简单地阐述一下这种方法，然而这种方法对于其它任何矩阵表也都普遍适用。这样，让我们观察矩阵表：

红者

		1	2	3	4
	1	2	3	1	4
蓝者	2	1	2	5	4
	3	2	3	4	1
	4	4	2	2	2

用星状号在你所想要的任意一行的末尾把该行标示出来（本例中取第一行）。然后，把这一行抄写在矩阵表下方，并且用星状号把该行中的最小数标示出来：

2	3	1	4	*
1	2	5	4	
2	3	4	1	
4	2	2	2	
2	3	1*	4	

寻找近似解的过程的第一个步骤到此告终。数字1*位于第三列中。现在请把这一列抄写在矩阵表的右边，并且用星状号

把该列中的最大数即5*标示出来。

2	3	1	4	*	1
1	2	5	4		5*
2	3	4	1		4
4	2	2	2		2
2	3	1*	4		

数字5*位于第二行中；把这一行的元素逐个地同写在矩阵表下方的那一行相加，把和记载在矩阵表下的新一行中，并且用星状号把新的一行里最小数（3*）标示出来：

2	3	1	4	*	1
1	2	5	4		5*
2	3	4	1		4
4	2	2	2		2
2	3	1*	4		
3*	5	6	8		

第二个步骤到此结束。我们已经开始了这个过程，而且要把研究工作继续进行下去。接下来，因为3*位于第一列中，所以应当把该列的元素逐个地同矩阵表右边的列相加：

2	3	1	4		*1	8
1	2	5	4		5*	6*
2	3	4	1		4	6
4	2	2	2		2	6
2	3	1*	4			
3*	5	6	8			

我们把最大数6*用星状号标出来。（由于这里几个数字都有同样充分的理由被看作最大数，所以其中究竟哪个恰好被标上符号，是没有什么意义的。）因为数字6*位于第二行中，我们便把该行同最下面的一行相加。第三个步骤就到此为止。这个过程还应该按这样的特性继续下去。为了明显起见，我们完成了十个这样的步骤。（请你注意：在最后的一列中，最大数未以星状号标出来。）

2	3	1	4	*1	3	5	7	10	13	16	19	22	25
1	2	5	4	5*	6*	7	8	10	12	14	16	18	20
2	3	4	1	4	6	8	10	13	16	19	22*	25*	28
4	2	2	2	2	6	10*	14*	16*	18*	20*	22	24	26
2	3	1*	4										
3*	5	6	8										
4*	7	11	12										
8*	9	13	14										
12	11*	15	16										
16	13*	17	18										

20	15*	19	20
24	17*	21	22
26	20*	25	23
28	23*	29	24

你在这里可以提出一个合乎情理的问题：好吧，那么再往下又怎样呢？我们刚才做的是连儿童也能做的死板机械的工作，但是直至现在，我们对它的用途还一无所知呢。让我们以那种勇往直前的气概将我们的工作再继续进行一步。现在我们把各行和各列中的星状号数目统计出来，并且把这些数目记录在矩阵表的旁边

红者

		1	2	3	4	蓝者的相对频数
蓝者	1	2	3	1	4	1
	2	1	2	5	4	2
	3	2	3	4	1	2
	4	4	2	2	2	5
红者的相对频数		3	6	1	0	

这些数字即是蓝者和红者做为混合自己纯策略所必须的根据的相对频数的近似计值，它们分别是1∶2∶2∶5和3∶6∶1∶0。

这些相对频数的估计误差到底有多大呢？我们可以通过检验采用这些策略的局中人的对策情况而对它做出评判。观察我们的阵列，从最后一行可以看得出，如果红者一成不变地采用其第二种纯策略，那么蓝者在十局中获得的最小收入有可能为23。因此，蓝者每局的平均收入至少为2.3。与此

相类似，我们观察一下最右边的一列，便可看出：（如果蓝者每一局都使用蓝者-3策略）红者的混合策略使其在十局中最大支出为28，即平均每局支出2.8。

数字2.3和2.8之间的间断正反映出关于最优混合策略的估计的不精确，因为假如所采用的策略是最优策略的话，那么各个局中人原本都可以保证自己有同样等于在2.3和2.8之间的中间数值的收入或支出。

在2.3和2.8之间的不确定区域组成支付值的20%左右，这样的误差是足够大的了。倘若我们把这个步骤继续进行下去，则能够找到更好的混合策略。假使我们把级数从10提高到20（如下所示）：

2	3	1	4	25 29* 32* 35* 38* 39 41 43 45 49 53
1	2	5	4	20 24 26 28 30 35 36 37 38 42 46
2	3	4	1	28* 29 32 35 38 42* 44* 46* 48* 49 50
4	2	2	2	26 28 30 32 34 36 40 44 48 50* 52

28	23	29	24
30	26	33	25*
32	29*	34	29
34	32*	35	33
36	35*	36	37
38	38	37*	41
40*	41	41	42
42*	44	45	43
44*	47	49	44
46	50	53	45*
50	52	55	47*

则蓝者和红者的混合策略将相应变成5:2:7:6和6:9:2:3，而且他们的平均收入和支出现在限定在从47/20到53/20的范围内，即从2.35到2.65之间。这样一来，支付值的不精确性就从20%减低为12%了。

这个数值已经可以认为是过得去的结果了。不然的话，你还可以把演算近似解的过程继续进行下去，而且随便进行多久都行。随着频数的增加，将会观察到所保证的支付值的起伏（涨落），但是在这种情况下，演算出的数值将越来越接近于对策的真实的得失。

我们这个对策的精确的解是蓝者的8:3:7:9和红者的5:7:3:3，同时对策的得失(有利于蓝者)等于$2\frac{5}{9}$。

因此，如果支付矩阵表是由于不大的整数构成的，那么根据这种方法，我们便可以镇定自若地面对10×10对策或甚至更大型的对策，因为这时只要有为数不多的几张纸、铅笔和一些时间就足够了。

再谈优势

在以前数章里，为了不破坏推论的总路线，我们对于优势问题的探讨仅仅是走马观花的。因为这个担忧已经过时，所以我们现在可以补充谈若干问题了。为着避免令人厌烦的重复起见，我们将以蓝者需要的观点来研究所有的问题。而当推论涉及到红者时，我们则让自己有可能去做必要的变换。

我们已经学会了很快地将各个从属的策略消去。这样，当某一行的支付值小于另一行对应的支付值时，我们就省略掉前一行。甚至当若干对应的支付值相等时，我们也可以照此处理。如果全部支付较小些，那么其状况称为严格的的优

势。如果某些支付值相等，其状况则称做非严格的优势。要区别这些状况并想出这些特殊的名称的原因在于：根据非严格的优势而消去某一行，可能在对策中产生不显著的变化，其结果是新对策中的解比旧对策的要少些。由于我们只局限于求一个解，而不是求所有的解，所以我们不需要区别优势的程度。

早先也谈过，各行的某种侥幸的组合可能比某一行占优势。这样，在对策

红者

蓝者	1	2	3	4	5
1	2	3	7	0	2
2	3	5	7	1	1
3	2	2	7	2	4

中，以频率 2 使用的蓝者-1策略从属于以频率1:1使用的蓝者-2和蓝者-3策略的混合体。

其次，假使某一列比以相同的部份或相对频数总数加以利用的其它列的混合体占优势，那么这一列便可以由最优策略混合体中删除出去。

目前还没有什么简单的经验法则可以判断类似的情势，同时这些情势也远非都是显而易见的。因为这个问题跟寻找好的混合策略一样复杂，所以没有理由企望会存在有这样的简单法则。虽然如此，我们始终应努力去发现这种情势。比方说，在例十六“继承人”（见第125页）中，很容易看出：第一行从属于取1/2:1/2频率的第二行和第三行的组合，因此它应予以删除。

现在让我们再研究一种，也是最后一种类型的优势——矩阵优势，这种优势按其特点很接近于鞍点的概念。实质上，它就是鞍点概念的总结。让我们观察一下如下这个外表很不好看的矩阵表：

1	3	1	4	6
2	0	3	3	1
3	1	3	5	4
−1	−1	6	−1	2
0	−4	0	3	4
2	−1	10	1	2
−3	0	3	4	5

有充分的理由把它划分为如下四个矩阵表：

1	3	1	4	6
2	0	3	3	1
3	1	3	5	4
−1	−1			
0	−4			
2	−1			
−3	0			

带斜线的矩阵表具有一种极重要的特点：在它右边的每一列都比带斜线的矩阵的任一列占优势，而位于该矩阵下方的每一行都从属于带斜线的矩阵中的任一行。如果带斜线的矩阵表具有上述的特点，则矩阵表其余部分方格中的数字都没有任何作用，因此我们甚至不必费心去把它写下来。实际上，假如带斜线的矩阵具有所指出的特点，那么矩阵中其余所有因素的精确数值都不再有什么意义了，并且整个对策可以归结为带斜线的矩阵表：

1	3
2	0
3	1

这样，我们的收获是抵得上我们为寻求它而付出的劳动的。在出现类似的情况时，应该记住：我们可以自由地调换任意行和列的位置。尽管这种方法从来不会妨碍你解题，但是你远非总能获得幸运的结局。有时，你甚至不得不抛下你日常的事务，把全部时间都花在研究某个大型的矩阵表上，直到你有难得的好运气，把矩阵解出为止。

简 单 解

迄今为止，我们都不制定那些只适用于非常特殊类型的对策的规则。如果我们现在要叙述一两条这样的规则，那么这该不致引起混乱吧。

据说，假使任何一个局中人能够不受报复地采用任意的纯策略对抗对手的最优策略的话，那么对策就有一个简单

解。在个别场合，与此类型相似的对策就是各个局中人的最优混合策略包含有他们全部纯策略的那种对策。要检验假设的最优策略，当然应当利用不受报复（惩罚）的原则。因此，简单解的概念就比全部纯策略的积极性的概念要更加明白得多，因为其中已包括有若干个以零的频率使用的纯策略的对策。这样，比方说在 4 × 4 对策中，蓝者可以利用任一纯策略对抗红者，如果他们的最优混合策略分别为3:2:1:7和1:5:2:4的话。如果对策中有简单解（而且实际上真有），假使他们的最优策略是3:0:1:7和1:5:0:0，那么他们也可以同样进行以上的对策。

例如，下面所引的这个对策有简单解，因为各局中人都可以采用任一纯策略对抗另一局中人的最优混合策略：

红者

		1	2	3	蓝者的相对频数
蓝者	1	6	−10	3	0
	2	4	4	4	1
	3	2	11	5	0
红者的相对频数		1	0	2	

平均支付值始终等于4。

通常，我们并没有这种稳妥可靠的方法使自己能够预先认识到对策有简单解。然而，也有可能存在一些特例。比方说，在对策

红者

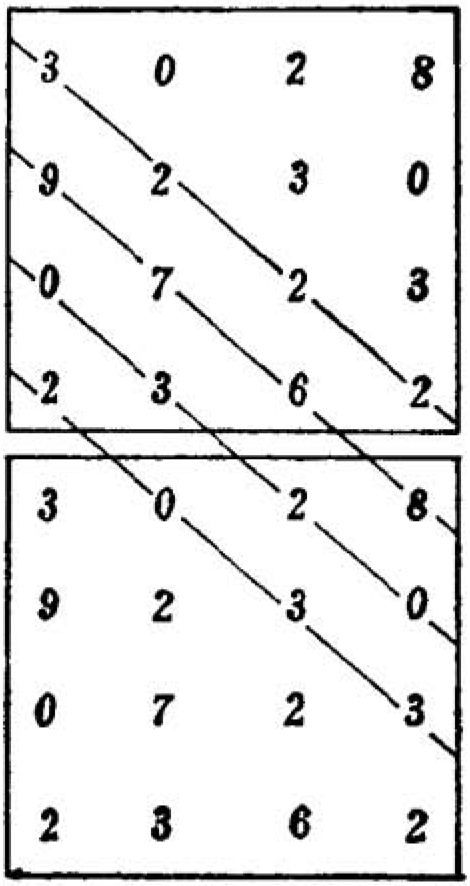
		1	2	3	4
	1	1	4	2	1
蓝者	2	−2	4	2	4
	3	7	−2	2	1

中，每一行各个因素的总和等于8，而每列各个因素的总和等于6。在这种的对策中具有简单解，而且很容易找得到。这就是其全部纯策略都是积极策略，并且它们都以相同的频率被使用的对策。因此，蓝者的解可以是1:1:1，而红者的解则是1:1:1:1。只要把任意列的各因素总和除以蓝者的策略数目，或者是把任意行的各因素总和除以红者的策略数目，便可获得对策的得失。在本例中得失即为6/3和8/4。

还有另外一类具有简单解的对策。这类对策，我们预先就能够区别出来，但它也要求作者和读者更为努力。为此，我们必须理解对角线和分隔对角线的概念。这类矩阵对角线，比如

3	0	2	8
9	2	3	0
0	7	2	3
2	3	6	2

可以这样来确定：把同样的矩阵表重抄一份于下方，然后照下面这样画上斜线：



（假使你已经理解这个概念的内容，那么你就完全不必要每次都重做这个矩阵表了。）

如果对角线只是由一些最大的数字所组成，即它最小的元素至少必须等于矩阵表其余部分最大的元素，那么对角线就称为是跟其它的矩阵表分隔的对角线。

我们同样也需要一个具有魔力的数字(把它称为M吧)，这个数字是由矩阵表中的行数乘以（排除分隔对角线之后）矩阵表其余部分的最大数而获得的。此后，我们便可准备好着手我们这一类型的具有简单解的对策了。

如果矩阵表含有分隔对角线，同时每一行或者每一列的支付值的总和不小于魔数M，则该对策具有简单解。

在我们举的这个实例中，对角线９—７—６—８是分隔的。行数等于４，而其余的最大支付值等于３。因此M＝４×３＝12。各行和列的因素总和等于13、14、12、13和14、

12、13、13。它们全都等于M＝12或者大于M。（对各行和列而言，即甚至比我们所需要的更大。）因此，这个对策具有简单解。的确简单，对吗？

多 种 解

虽然迄今为止，我们的需要仅只限为确定对策的某个单一的解，但是有时也明显看出对策可能有不止一个的解。

这种情况在某些方面具有许多特点：每个对策要么确实只有一个解，要么有无限多个解。直到现在，我们对本书中引用的许多论点都不作任何证明，但是要证明这后一种论点却是如此的简单，以致我们禁不住要举例证明一下。我们假定一个对策至少有两个解（即有两种最优策略）。那么这些解便可以以任意的相对频数混合起来，而这样的频率可能有无限多。

以上所述似乎使人感觉到确定解的数目是一种事倍功半的工作。它类似火药试验的问题：那些火药要么完全没有活性，要么就发生爆炸。虽然如此，但可以认为这个问题会有更大的意义。为此，应该指出的是：每个对策只有有限的基本解。

可以如下的方式确定基本解：如果一个对策的子矩阵（即经过删节的对策）具有唯一的简单解，即各个局中人根据这个解可以采用任意的纯策略对抗对手由这个解提供的最优策略，而不致带来附加的损失，而且这个简单解同样也能满足原对策，那么这个解便可称为是基本解。任何一个对策都只有有限数量的子矩阵（其中并非全有简单解）。因此，基本解的总数同样也应是有限的。各种解的绝对数可以由以各种可能的方法混合基本解的结果而获得。

请看实例：

		红者	
	1	2	3
蓝者 1	2	6	0
2	5	3	6
3	4	4	3

在这个对策中没有鞍点（不然的话，它们就成了基本解）。在九个2×2的简化方阵中只有两个

2	6
5	3

和

6	0
3	6

包含着所有纯策略参与的混合策略的解（即简单解），并且这些解也能满足初始的对策。这些解分别是蓝者 2∶4∶0 对抗红者3∶3∶0和蓝者3∶6∶0 对抗红者的 0∶6∶3（为着便于检验，故未以公因子约简）。3×3矩阵同样有简单解，而且因为这种矩阵表代表一种独特的对策，所以这个解就是基本解。不过，它似乎恰好同已经求出的解之一，即同第一个解相等。因此，这个对策只有两种不同的基本解，它们在用公因子约简后可以写成如下形式：

蓝者1∶2∶0对抗红者1∶1∶0，

蓝者1∶2∶0对抗红者0∶2∶1。

这样一来，蓝者只有一种最优策略，即 1∶2∶0，而与此同时，红者却可以利用1∶1∶0或0∶2∶1的策略，或者利用这些

混合策略的任意混合体。例如，如果把第一种基本策略看作3①，而把第二种基本策略看作5，那末我们就获得3:3:0和0:10:5的混合策略，它们的组合②同样也提供出3:13:5的最优混合策略。

一位坚定不移的对策论爱好者，准会情不自禁地去探求下面这个对策的基本解。蓝者拥有五种基本解，而红者只有一种解。这些解附于书末。

练 习 六

红者

蓝者	1	2	3	4
1	16	-8	9	-3
2	-20	4	9	-3
3	25	1	18	-6
4	-11	13	-18	6

关于测定支付值的问题

运用对策论的人经常会遇上的一种非常明显的困难是他必须测定出一些缺乏足够可靠的根据加以测定的事物。这是极为严重的困难，切不可低估。另一方面，如果不注意到测定如何确定着策略的选择和对策的结局的话，几乎同样容易

---

① 即把全部的相对频数乘以3。——俄译者注。

② 即求出在"衡量过的"频数增加以后，按各纯策略先后（第一对第一，等等类推）相加的总和。——俄译者注。

把它估计过高了。现在让我们把有关这个问题的研究范围稍为扩大一些。

从有关优势问题的讨论中可以明显看出，可能有些情势发生时并不处处要求精确的测定。不作真实的测定，仅仅利用质的对比来判明某些行、列或子矩阵是从属的，这样做也是可以的。在这样的场合，也可能遇到按优势原理被消去的元素难以测定的情况。归根到底，为了确定一片森林中最高的一棵树的高度，并没有必要测量所有的树木。

我们在本书开头曾经指出，往矩阵表中的各个元素上增加一个常数，对局中人的最优策略并不产生任何影响。因此，假设矩阵表是由四个数字所组成的，例如是1、7、11和1066，如果把各个支付值减去533，而后按我们下述的-532、-526、-522和533进行对策，那末我们对策进行的情况将不会比原来的差。我们同样也指出过，假使全部的支付值都乘以一个任意的正常数，那么对策并不发生变化。举例来说，如果把我们的矩阵表中的全部数都乘以1/13，那我们将获得$-40\frac{12}{13}$、$-40\frac{6}{13}$、$-40\frac{2}{13}$和41的支付值。这个加上和乘上常数的步骤可以按任意的序列继续进行下去。因此，我们可以自由地把最后一个矩阵表的全部支付值加上40，同时可以确信这两个对策

1	7	1
11	1	1066
1066	1	7

和

-12/13	-6/13	-12/13
-2/13	-12/13	81
81	-12/13	-6/13

从选择策略的观点来看是完全相同的。

现在已经愈来愈明确：对策的策略不以加和乘常数为转移的独立性可以在相当的程度上减轻我们在精确测定支付值方面的困窘。假如在我们所研究的支付矩阵表中有三种不同的支付值，那么这个情况就值得重视。这时，最小和最大的支付值是多大，一点儿都不重要。唯一有意义的是第三个支付值的相对状况。

顺便说一下，还有一个取决于对策行动的重要因素，它对于策略的选择没有任何影响，这恰正是对策的得失。知道对策的得失是等于20，而不是10，或者说是等于10，而不是20，其结果是重要的。这在实际上能影响到局中人参加对策的意向，当然，这是指如果他有选择的可能性的话。但是导致胜利的是同一个最优策略，而不依赖于收入的总数。

因此，可以把各策略所处的对测定上的误差表现敏感的区域看作是各支付的极限数值之间的过渡部分。这是因为极限值的地位可以随心所欲地颠倒过来，而且对策略毫无影响，只要中间数值也同样加以颠倒的话。为了获得测定的误差、策略和对策的得失之间相互关系的知识，让我们进行一个小试验。

从一个典型的3×3对策开始：

红者

		1	2	3
蓝者	1	6	2	0
	2	4	8	4
	3	3	3	10

支付拥有从零到十范围间的数值，同时所有其它策略的支付值也随之包括在这个范围内。我们认为这不能影响对策的得失，比如由于加上或乘以一个常数的结果而改变其比率。现在，我们要以下述方法利用矩阵表各个因素独立的变化来模拟测定上的误差：我们将按同等概率的法则加上－1、0或者＋1，用这样的方式来模拟随机的同等概率的误差。我们要从法则中搞如下一个例外：使极限值（0和10）保持不变，同时排除一切能导致超出这些极限值范围的支付值的变化。其目的是希望保持住初始的比率（从0到10）。利用随机数表可使我们的矩阵表变为

红者

		1	2	3
	1	7	2	0
蓝者	2	4	7	5
	3	2	4	10

这个过程还可以继续进行下去。所获得的矩阵表可能再次受随机误差的影响而得出又一个新的矩阵表，它想必将比第二个矩阵表更不象原来的矩阵表，等等。可以把第三个矩阵表看成是真实的，而把原矩阵表看作是受随机误差的再次影响而由它获得的。往下，我们再依照如下的假设就显得方便些了。

现在，让我们假定正参加某个对策，比方说，是第一个对策，与此同时我们其实是进行着第三个或第二个对策。问题是：这个误差的后果究竟有多么严重。让我们从蓝者的观点来分析这个问题。

第二个（真实的）对策要求蓝者以22:26:16的相对频数使用其三种纯策略，提供给他的对策的得失为$4\frac{17}{32}$，但是，蓝者由于遵循谬误的第一个矩阵表而认为他必须以7:7:6的相对频数对策，并且他果真如此行动着。后果将取决于红者运用什么样的策略。假如红者依次运用其第一、第二和第三种的纯策略，那么蓝者将相应地收入$4\frac{9}{20}$，$4\frac{7}{20}$和$4\frac{15}{20}$。他所可能遭遇到的最劣的情况是收入$4\frac{7}{20}$，这比$4\frac{17}{32}$少0.18。这个$4\frac{17}{32}$是假设他知道真实的矩阵表时，他原本应该得到的收入。

我们的试验是使第一个矩阵表依次受到以下十四次随机误差的影响：

1.

6	2	0
4	8	4
3	3	10

2.

7	2	0
4	7	5
2	4	10

3.

6	2	0
3	6	4
1	3	10

4.

7	1	0
4	7	3
0	4	10

5.

6	2	0
3	7	3
1	5	10

6.

5	3	0
3	7	4
1	4	10

7.

4	3	0
3	7	3
2	5	10

8.

3	3	0
2	8	4
2	4	10

9.

2	3	0
1	8	4
3	3	10

10.

1	2	0
1	8	4
3	4	10

11.

1	1	0
0	8	4
2	5	10

12.

1	2	0
0	8	3
1	4	10

13.

0	3	0
1	8	4
2	5	10

14.

0	2	0
1	7	3
1	5	10

15.

0	3	0
2	7	4
0	4	10

现在，我们要把最后的十个对策每个都看成是真实的对策，而在每个场合中，我们却将按跟真实的对策相差五个号数的那个对策进行活动。

这些对策的最优策略将是：

对 策	蓝　　　者	红　　　者	对策的得失
1	7∶7∶6	14∶2∶4	$4^2/_5$
2	22∶26∶16	40∶5∶19	$4^{17}/_{32}$
3	25∶24∶16	36∶10∶17	$3^{47}/_{63}$
4	34∶32∶27	51∶9∶33	$3^{29}/_{31}$
5	36∶12∶24	41∶15∶16	$2^5/_6$
6	33∶3∶18	36∶4∶14	$3^5/_9$
7	4∶0∶2	5∶0∶1	$3^1/_3$
8	8∶0∶3	10∶0∶1	$2^8/_{11}$
9	0∶0∶1	1∶0∶0	3
10	0∶0∶1	1∶0∶0	3
11	0∶0∶1	1∶0∶0	2
12	0∶0∶1	1∶0∶0	1
13	0∶0∶1	1∶0∶0	2
14	0∶0∶1	1∶0∶0	1
15	0∶1∶0	1∶0∶0	2

公因子未被消除，所以蓝者和红者的相对频数总和是相同的。

让我们统计一下，根据所拥有的这个信息，蓝者的损失如何。

蓝者收入的损失的平均数值

矩阵表受如下次数随机误差的影响

蓝者根据对策N而采取的策略	1	2	3	4	5
1	0.18	0.30	0.09	0.38	0.46
2	0.21	0.22	0.30	0.37	0.24
3	0.57	0.47	0.21	0.16	0.33
4	0.32	0.41	0.26	0.36	1.05
5	0.22	0.17	0.23	0.83	1.33
6	0.06	0.12	0.72	1.33	0.72
7	0.06	0.67	1.33	0.67	0.00
8	0.73	1.45	0.73	0.00	1.45
9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	0.00	0.00	0.00	0.00	2.00

这份阵列表显示出假如蓝者的策略根据一种矩阵表，但与此同时，对策却按另外一种矩阵表进行时，蓝者的收入同对策的得失相比可能降低到什么程度（也可能并不降低）。

这种差别应随着由于各矩阵表中支付值的误差增大（而产生的）向右的移动而增大。这个预测得到了确证，因为各列中差别的平均值相应等于0.24、0.38、0.39、0.41和0.76。

由这试验中可以得出一个结论：在测定矩阵表中各支付值时产生的相当大的误差，虽然并不合乎愿望，然而也未必会招惹来什么奇灾大祸。在大约半数的场合，可能损失的最大数只比在各对策的从 3 到 4 之间的得失小于0.30，即近似地少10%。

以上所讲的这些内容使我们（至少是使作者）有理由期

待对策论甚至在那些难于测定支付值的领域里也能够（使人们）获得重要的成果。

支付值的质量评估

支付值的质量评估是以上所谈问题的自然继续。

有一种效用极小的测定（度量）形式，我们称之为（整理）序。其形式就是按次序排列各支付值，如同我们按照热度的不同来排列象冰块、白热化的金属、一杯咖啡、你的血液和太阳这些东西一样。

假如你不能以数量评估你所想要的支付值，但是能按次序排列它们，那么你就并非山穷水尽。有些对策的情势，只要能确定按支付值的数值大小排列的次序，而不要更多的条件，就可以解。还有一些情势，只要知道各支付值的次序就能部分地知道有关对策的最优策略及得失的结论。

我们假定你必须解出一个支付值不明确的对策，但你可以把这些支付值分别评估为劣（n）、中（y）、好（x）或优（o）。我们将把这种对策当作其矩阵表是由数字组成的对策进行研究。让我们从检验对策的鞍点着手：

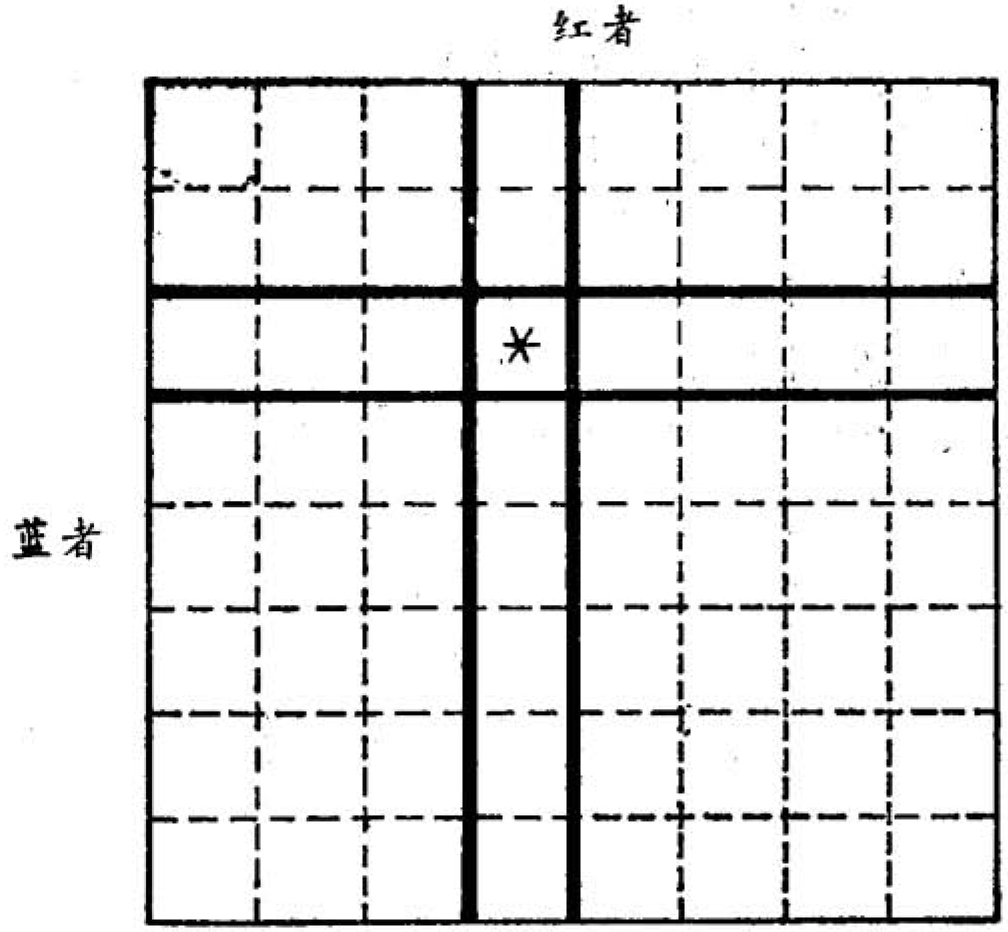
红者

		1	2	3	4	5	各行的极小值
蓝者	1	n	y	x	o	x	n
	2	y	y	x	x	o	y*
	3	n	o	o	o	y	n
	4	y	o	y	n	n	n
各列的极大值		y*	o	o	o	o	

在该对策中，各行最大的极小值跟各列最小的极大值相等。因此，蓝者必须遵循其第二种纯策略，而红者则必须依从其第一种纯策略。对蓝者而言，对策的得失是中等的。

这样，我们便完全解出了这个对策。当然，我们是走了好运，但这也并没什么可责怪的。

这种类型的对策和前一节叙述的问题之间是有关联的：它们都同测定（度量）支付值的精确性有关。我们可以用最概括的形式来研究这种相互关系。我们假定对策在以星状号标出的方格中拥有鞍点：



在这种情况下，这个方格的位置或者矩阵表的数值都没有意义。根据鞍点的定义，这个星状号就意味着该列中的最大数。由此可以得出结论：如果这个以星状号标出的数字一直是最大数，那么这一列中的所有其余的数字都可以随意更

换，而不会影响结果。

与此相同，星状号指出的是它所处的那一行中的最小数。只要以星状号标出的这个数字一直保持着最小，则该行中的其余数字就可以随意（随机或不随机地）替换。

最后，矩阵表中其余所有不在那列和行（星状号位于该行和列的交叉点上）上的数字，一般地说可以是合乎需要的随便什么数值。这些数值无论对进行对策的方法来说或是对其得失而言，都毫无意义。

对策的得失仅仅取决于以星状号标出的那个支付值。因此，精确地测定出这个支付值，也就是精确地评定出对策的得失。

在下面所引用的对策中，我们能够得出有关最优策略的若干结论：

红者

		1	2	3	各行的极小值
	1	n	o	y	n
蓝者	2	x	y	x	y*
	3	n	x	n	n
各列的极大值		x*	o	x*	

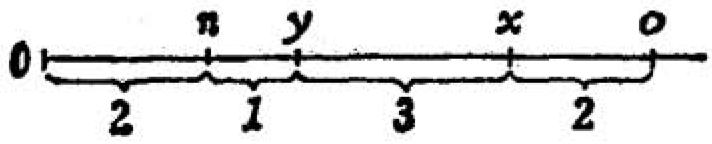
最大的极小值是中（y），而最小的极大值是 好(x）。对策中没有鞍点。但我们已经知道：对策的得失就在中和好之间的某个地方。

并且，蓝者－1策略比蓝者－3策略占优势，而红者－3策略又比红者－1策略占优势，因此，这个对策可以归结为如下的矩阵表：

		红者 1	红者 2
蓝者	1	n	o
	2	x	y

运用蓝者－1策略的频数与好（x）和中（y）之间的差数成比例，而运用蓝者－2策略的频数则与优（o）减去劣（n）之间的差数成比例。因此，不管这些概念（符号）将写成什么数字，显然可见的是：蓝者使用蓝者－2策略的次数应该多于蓝者－1策略，同时他不应使用蓝者－3策略。

红者的状况有点儿难于确定。他必须以与优（o）和中（y）之间的差数成比例的频率使用红者－1策略，而以与好（x）减去劣（n）的差数成比例的频率使用红者－2策略。在这里不知道的是哪一个差数较大些。这样一来，我们关于红者的最优混合策略所能够说的全部东西就是：这种策略要以红者－1和红者－2策略为基础，同时，在采用这两种策略的频率之间的差别不如蓝者那么明显。换句话说，红者的最优策略的相对频数比较蓝者（的最优策略的相对频数）差别较小。只要将评估记成若干等级（比率）的数值，并且做个统计，你便可以很容易确认这一点。例如，对于等级（标度）



来说，蓝者的相对频数将是3：6，而红者的相对频数则是5：4。

例三十三　鲍细霞

莎士比亚在《威尼斯商人》中描写了一位穿着富有创造性的想象的化装服装的现代贝壳游戏的遥远先驱者。

富有的继承人鲍细霞既无权为自己挑选称心如意的丈夫，也无权拒绝她所不爱的求婚者。这是因为她已故的父亲要求那些追求她的女儿和财富的竞争者必须履行如下的定约：他们每个人都得走进一个摆着三个精致箱匣的房间，而鲍细霞的画像就放在其中一个箱匣里。他可以打开其中任意一个箱匣。谁能找到鲍细霞的画像，谁就能获得她本人。这和可以藏一粒豌豆的贝壳游戏的不同点只是赌注变大了。她的父亲是个言而有信的人，他确确实实把女儿的画像放在其中的一个箱匣里了，不过求婚者并没有这方面的任何证明。

这个把戏中还有若干附带的条件：每个求婚者必须宣誓，如果他失败了，他不得对任何其余的求婚者透露他曾选过哪个箱匣。这个条件可庇护鲍细霞摆脱她的崇拜者联盟。此外，每个求婚者还必须宣誓，如果他不走运，他永远不得娶妻。这后一个条件的目的是缩小求婚者的范围，只保留下那些痴心追求鲍细霞（及其嫁妆）的小伙子。另一方面，对于那些敢于冒险一试的人来说，这又有极重要的暗示：他们能够从中得利。这些箱匣是分别用黄金、白银和灰铅制作的。在金匣上有这样的题词：“选择我的人，将会

赢得许多男子汉所期望的东西。”在银匣上的铭文是：“选择我的人，将会获得他理应得到的东西。”而在铅匣上写的是一句短语：“选择我的人，必须冒丧失他所拥有的一切的危险。”而在当时，几乎所有的求婚者选择的箱匣里都只有灰尘而已。这场竞争属于下列形式的3×3对策：

热烈追求者选择的是 \ 父亲选择的是	金匣	银匣	铅匣
金匣	B	n	n
银匣	n	B	n
铅匣	n	n	B

在这个矩阵表中，字母B表示鲍细霞的胜利，她的求婚者可视此为正值，而字母n则意味着终生不结婚。

每一个追求者都可以把这场竞争看成是零和对策，或者是他应该努力猜度出她父亲的想法。不过，由于她父亲的想法独出心裁，所以这后一种处理方法显然是没有成功希望的。根据对策的对称性，可以得出一个结论：选择金匣、银匣和铅匣都必须按1：1：1的相对频数进行。对策的得失等于：

$$\frac{B+2n}{3}$$

只要B+2n是正值，那么对鲍细霞的追求者来说，参加这场竞争就是合理的。B的数值几乎无疑是正值，而n的数值看来一定是负值了。因此，求婚者参加竞争的决心取决于他如下的对比关系（按对策论意义上说，如果他是一个理智

的人的话：他对于鲍细霞的爱慕必须至少双倍地胜过对自己终生当单身汉的耽心。这个通报并不能减轻他选择上的困难，然而却可以较明确地断定结局的意义。

例三十四　淑女或猛虎

弗兰克·斯托克顿的故事“淑女或猛虎”启示我们举出这个例子。不过，为了获得2×3对策，而非2×2对策，我们已将原作略作改动。

国王对他的年轻的内侍官很不满，因为公主爱上了他。为了捉弄一下这个年轻人，国王判他经受一场考验：他必须去把两扇门打开一扇。在一扇门后坐着一位美貌的少女，而在另一扇门后蹲着一只漂亮的小雌虎。以下各处的假定都是：年轻人喜爱淑女甚于猛虎。（顺便说说：他必须娶她。）

你也许会认为他很少有进行自由自在的创造性的思考的余地了，尽管这场考验的结局跟他的利害关系非同小可。最后，他得出一个结论：国王赋予他的行动自由比预测得更大些。须知，假如他同时打开两扇门，那么他就有可能在发生的一场大慌乱中成功地逃掉。

就在这时，公主也知道了国王的全部的策划内容，但她并不晓得国王故意这样做的目的就是要让她知道。她会向年轻的内侍官做暗示，向他指出他应该开的那扇门。

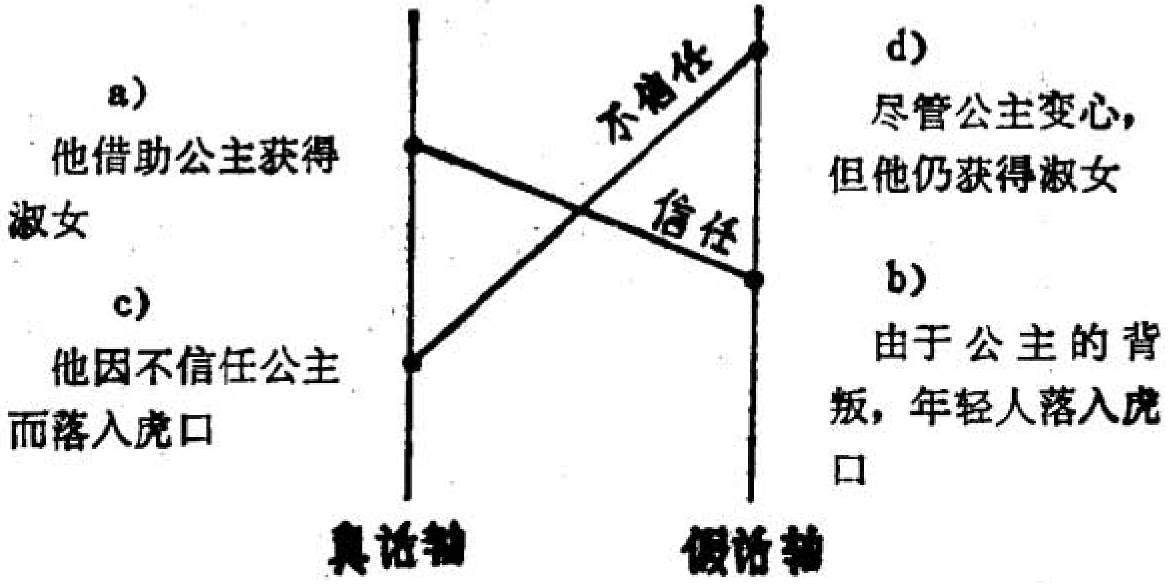
现在，这个小伙子可供创造性思考的材料真够丰富的了。倘若公主对他爱得够深，那么她也许愿意使他选上少女。但是，倘若她爱得不深或者是过于深了，那么她也许宁可让他跟那只猛虎共度残生。公主有两种策略：她可以将他引向少女或雌虎。年轻人有三种策略：他可以执行公主的指示，或者采取反措施。除此之外，他也可能靠损害少女的利

益而试图满足猛虎的贪欲。

我们现在且不去设法确定这位年轻人必须为各种二者择一添记上的各种支付的精确数值，却要借助于我们已在第二章中探讨过的图解法来研究这个难题。我们将以各种字母来标示支付矩阵表的各种元素：

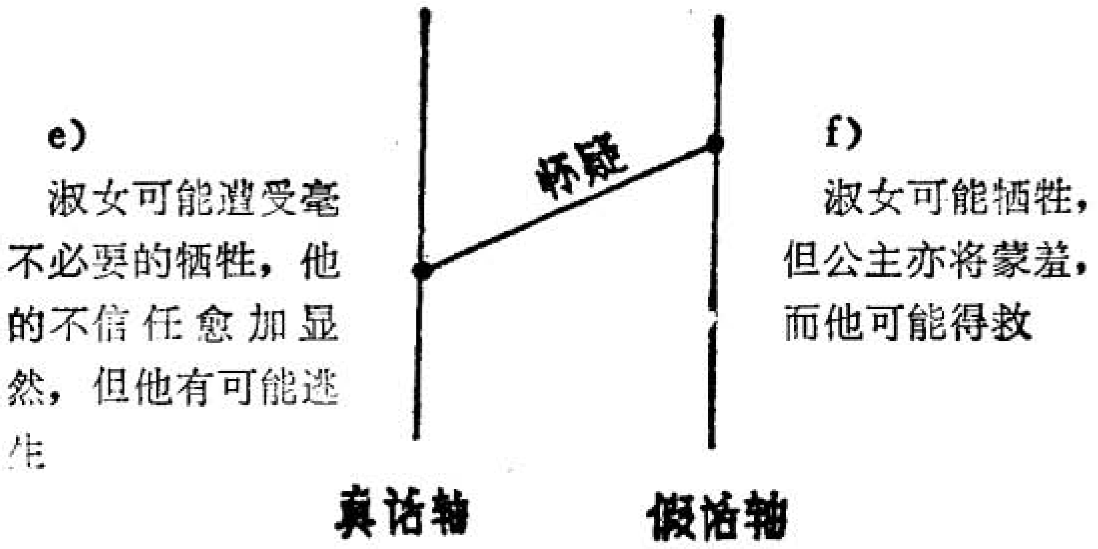
		公主说的是	
		真话	假话
年轻人的行动证明	信　任	a	b
	不信任	c	d
	怀　疑	e	f

我们利用两条垂直线做支付轴，一条当真话，另一条当假话。标在这些轴上的点的高度跟他认为该事件具有的价值成（正）比例。不难明白，他从质量的观点来看，该如何评估从a到f的全部事件。



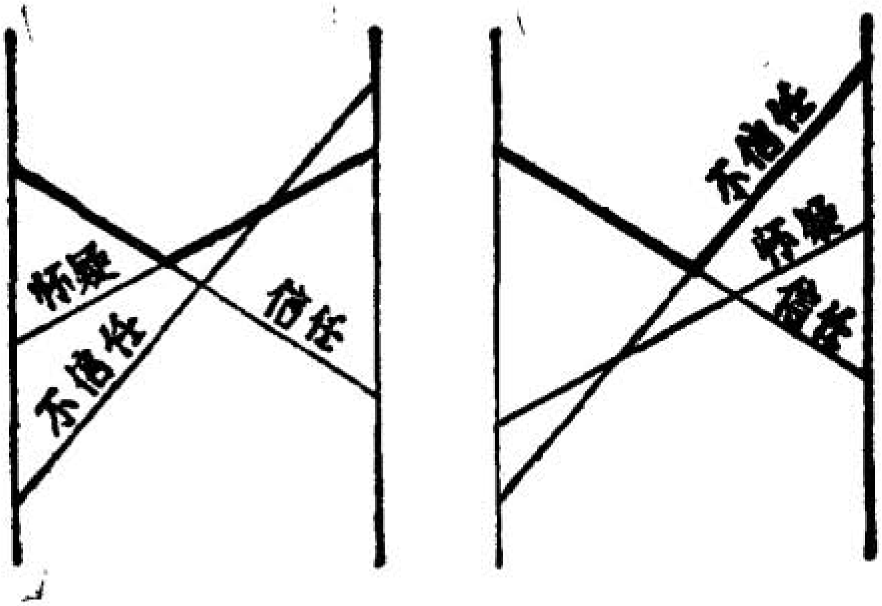
假如他只限于采用两种策略（即信任的策略和不信任的策略），那么他显然只得运用混合的策略。线条交叉的事实就指明了这一点。（如果他把事件 a 评估得高于事件 d，那么从质量的观点来看，这丝毫也不会改变解法。）

现在，让我们再分析其余两种可能性。为此，应在图象上画一条补助线：



至于这条线的一般特性，无疑是由真话轴向假话轴上升。

困难发生在要把这两个图象迭在一起的时候。这里出现一个评判的问题：怀疑线应该怎样穿过呢？它应该比信任线和不信任线的交点高些还是低些呢？假使这线从较高处穿过，那么年轻人就必须混合使用信任和怀疑的策略。假使这线从较低处穿过，那么他的混合策略则应由信任和不信任的策略组成。这些解都不以怀疑线高或低于交点的程度大小为转移。这些解也不取决于怀疑线的倾斜程度。（如果怀疑线从其它线上面穿越时，高到不会同任何一条线相交的程度，那么在这种场合，怀疑就成为鞍点型的解。）这些局势可以用如下的图象表达：



为了要计算出每种策略的相对频数，我们就需要设身处地把自己当成是年轻的内侍官。不过，让我们还是把这一切的苦恼和疑虑留给他一个人吧……

通常只进行一次的对策

我们在全书中都回避了一个微妙的问题，这可能引起涉猎者及职业家的不满，不过这两者不满的缘故正相反。因此，我们觉得至少应当公开评论一下这个问题，哪怕这样做并不会受到谁的欢迎。

属于对对策论一知半解的涉猎者（爱好者）的读者可能认为对策论在那些通常只进行一次的对策场合显然是无能为力的，因为混合策略的概念本身就需要有许多局反复进行的对策。这些读者能够赞同我们的若干实例，例如“淑女或猛虎”这样的例子，因为这样实例中的事件是完全不可能重复的。他们也许会善意嘲笑我们谈得入了迷，而且离题太远了。

同样可以理解的是，我们那些以对策论为职业的某些读者可能担心不讨论这个问题了。不过，他们将会感到不快，因为我们迄今为止并未断然表示对策论应该只应用于那些只进

行一次的对策。他们大约不会赞同那些可以反复进行对策的实例，如“‘达依克威里’鸡尾酒会”或者更差的，如“街头小贩”。这些恐怕也能说明是研究的对象使我们不得不走得过头一些。

只需用不太多的功夫就可以证实，要详细研究这个问题很容易就会使我们超出适宜于入门读物的范围之外。因此，我们只局限于若干点，这些点如我们所期望的那样，将使非职业性的读者透过迷雾看到救命的陆地。

我们希望这种读者能够接受一种不加论证的论点，即对策论的严谨的数学原理本来就是通过斟酌一局对策而推定出来的。如果你能采纳这种论点，那么就不难相信：（对策论的）理论也适用于那些只进行一次的对策。在先头我们叙述对策论的时候，可以有理由认为我们当时叙述的都是些反复多次进行的事件。其原因就是：对我们而言，类似这样处理问题的方法是较为相宜的（况且，这种方法从科学上说也证明是正确的），不过，既然频率法并不是构成对策论基础的数学论证所必须遵守的，那么我们原先就并不一定要恰恰这样来进行。

上述这一切要求读者至少要相信作者的良心。从另一方面说，我们还可以援引将获得你直接回答的全部论证。现在让我们研究一下这种对你来说具有极大意义的不反复的对策现象，并且与此同时，你的对手又是极机敏的。我们这样假定：倘若你的对手已经知道你所选择的策略，则将给你造成非常困窘的后果。对你来说，唯一的补救办法就是利用随机机械或是对手所无法理解和预测的抛签来选择策略。当然，他也许会碰到好机会，并且不管怎样也将识破你的选择，但是，你必须安于冒几分可能的风险。对策论只不过是指示出

你的随机机械应当具备的那些特征而已。

你可能会赞同（如下）另一种观点。按这种观点，你在从生到死的整个一生中，都必须进行大量的一次性收付的对策。这些对策并非都是有决定性的，而且运用各种混合策略能够改善你在全部对局末尾的平均收入。

对策论的专家在这个问题上有两个观点，可能引起你的兴趣。第一个观点是：既然已经详尽地研究过对策论在一局对策中的运用，如果有人反驳他说，这对策必须进行（比方说）整整十一次，他就没有把握相信这个理论和他原先研究过的理论会完全一致。作者觉得，在这种观点中包含有高深的科学，但是对于实践来说，这种观点里的纯科学是过多了，还没有一种十一局对策的理论，同时也没有产生这种理论的指望。

然而，在同自然对抗的对策场合，这种无可非议的学者观点是不应当如此轻率地抛到一旁去的，这是因为给定的对策的长序列的各局中，可能包含不容忽视的有关自然的混合策略的通报（信息）。实际上，在这里对策论专家已经涉入了统计学的领域。而统计学则拥有它自己的藉以解决各种难题的一大堆科学方法。

对 称 的 对 策

现在，让我们再来研究一种具有奇异特性的对策——对称的对策。如果在支付矩阵表中的各行、列之间存在下述的关系，即：各行诸元素的序列恰好和各对应的列（诸元素）的序列相同，只是对应诸元素的符号相反，那末该对策就称为对称的对策。这种定义是由于主对角线的诸元素必须都等于零的结果。这样，矩阵表

0	2	3
－2	0	－6
－3	6	0

是对称的对策矩阵表。比方说，你可以证实：第三行（－3、6、0）和第三列（3、－6、0），就象其余所有成对的行和列一样，具有我们要求的特点。

这里有两条关于对称对策的有益评语。第一，这是一种公平的对策，因为我们知道，你不必计算得失，这种对策的得失等于零。第二，两位局中人可以采用同一种最优策略。

各个对策都可以变换成另外一种更大的，但对称的对策。这样对演算是有好处的。要做到这样，必须使初始对策的得失是正值。

不过，我们只要向各个支付值增加一个大的常数（它并不影响到策略），就总可以做到这一点；但应该记住把这个常数从计算出的得失中扣减去。

为着演示一下这种方法，现在让我们来研究一个对策和两份由数字组成的辅助矩阵表：

红者

		1	2	8		
蓝者	1	5	1	3		1
	2	2	4	1		1

1	1	1

我们用字母G、V和H相应标示对策的垂直的和水平的矩阵表。此后，我们就组成这种形式的矩阵表：

O	G	−V
−G*	O	H*
V*	−H	O

星状号在这里代表着以列替换行的指令。负号指的是改变矩阵表中诸元素的符号。各个零表明仅由零组成的矩阵表。如果用数值来代替这些符号，我们则获得：

		红者*					
		1	2	3	4	5	6
	1	0	0	5	1	3	-1
	2	0	0	2	4	1	-1
	3	-5	-2	0	0	0	1
蓝者*	4	-1	-4	0	0	0	1
	5	-3	-1	0	0	0	1
	6	1	1	-1	-1	-1	0

这个就是对称对策的矩阵表。这个6×6对策中的两位“局中人”可以运用同一种最优策略。（该表局中人名称旁边的星状号是为了使这两位虚构的局中人有别于初始对策中的两位真正的局中人。）

假如现在你能够求出这个对策的最优策略（该矩阵表的最后一列就提供了一种积极纯策略），那么这个对策的策略就会按下列图式与初始对策的策略有关：

	蓝者	红者	对策得失
初始对策的各种纯策略	1 2	1 2 3	
对称对策的各种纯策略	1 2	3 4 5	6

换句话说，使用蓝者和红者各种纯策略的相对频数等于与对称对策中前面两组纯策略有关的相对频数，而初始对策的得失则与最后一种纯策略的相对频数成比例。在本例中，对称对策的解将是3:2:0:2:3:11，这同以下初始对策的解是相符的：

		红者 1	红者 2	红者 3	蓝者的相对频数
蓝者	1	5	1	3	3
蓝者	2	2	4	1	2
红者的相对频数		0	2	3	

它的得失等于11/5。

线性规划

我们已经利用书中援引的许多实例屡次证实，对策论在人类活动的广阔领域里都可以发挥效益。因此，对策论理所当然地也同各个学术部门的发展紧密相连。这种联系有时表现在理解概念的水平上，有时则纯粹是形式方面的（这是指采用同一种数学方法的场合）。在两种情形下具有这种联系会带来好处，因为各种思想和方法的相互交流可以导致所有领域知识的综合。

作为这种交流的典范，让我们来观察一个被称为线性规划的著名的行政管理方面的科学方法的特例。在这方面的先驱者是美国空军，他们曾经详细研究过合理的平面配置和补给的图式①。它必须保障在不同的期限内将完成作战任务所必需的各种物资，由不同的产地运达不同的地点，并且这一切活动都限定必须以最经济的方法进行。从精打细算的观点来说，这种类型的问题可以归化为对策的形式。下面举的这个实例可以有所说明。

例三十五　饮 食 制

约翰作出了一种以肉食为主的新饮食制。他每吃三盎司的瘦肉就应吃下一盎司的脂肪②。由于价格是一切肉食制的一个最重要的考虑方面，所以，他决定计算一下，假如他要从所需比例的脂肪和瘦肉中得到若干名义数量为十磅的肉食，他应付多少钱。

丹齐克肉店陈列着三种约翰喜欢的肉食品。这些肉每磅

① 应该指出的是，线性规划的方法最初是在1939年，即在美国出现之前许多年，由列宁格勒的数学家Л·В·冈托洛诺奇提出的，见《解因子的方法》。——俄译者注。

② 盎司：这里为英制重量单位，分金衡和常衡两种。该处指常衡。为1磅的1／16。——俄译者注。

含有1盎司、5盎司和10盎司的脂肪，其价格分别为1.35美元、0.85美元和0.65美元。

所有这些因素可综合于如下三个矩阵表中（度量单位分别为盎司和美分）：

		脂肪	瘦肉	价格
肉的种类	1	1	15	135
	2	5	11	85
	3	10	6	65
需要的数量		40	120	

让我们以字母M、P和Q对应地标示肉的种类、价格和数量。

现在，我们就编出一个有新内容的矩阵表，我们（原有的）矩阵表将作为元素加入新表中：

O	M	$-P$
$-M^*$	O	Q^*
P^*	$-Q$	O

这个矩阵表中的负号表明辅助矩阵表的各元素应将其符号变作相反的。星状号则指辅助矩阵表的所有各行应用各列替换。零意味着辅助矩阵表仅只由零组成。把数值代入符号M、P和Q，便获得一个新的矩阵表：

红者

		1	2	3	4	5	6
蓝者	1	0	0	0	1	15	-135
	2	0	0	0	5	11	-85
	3	0	0	0	10	6	-65
	4	-1	-5	-10	0	0	40
	5	-15	-11	-6	0	0	120
	6	135	85	65	-40	-120	0

由于这些对你来说已经不再是什么新鲜的东西了，所以你马上可以看出这里的对策是简单的，因为任何矩阵表都可以这样来研究。我们这个对策原来是6×6的对策，而且还是对称的对策。这一点就保证对策是诚实的，同时也保证属于某一局中人的任何最优策略同样属于另一局中人。有谁能猜想到它的解是同饮食问题有关连的！

各个对策都有解，但是线性规划的若干问题却没有这样的解。假如线性规划的问题有解，那么看来，在对策中就应当有最优策略，在该对策中的最后一行（或列）——在本例中为第六行（或列）——是积极的，即它的相对频数不等于零。假如这个条件是充分的，那么线性规划问题的解就可由将第一组中的各个纯策略——在我们特例中是第一种、第二种、第三种策略——的相对频数除以最后一种策略——在我们举的例中是第六种策略——的相对频数而求出来。

在上述例中的对策应按0:120:0:0:85:11的相对频数进

行。因为最后的相对频数（11）不等于零，所以线性规划的这个问题应该具备解。

实际上，约翰应买有三个品种的肉0/11磅、120/11磅和0/11磅，即他应买$10^{10}/_{11}$磅每磅价格为0.85美元的肉，而拒绝买其它品种的肉。这样，他花9.27美元就能买到120盎司的瘦肉和54盎司的脂肪。同所需要的数量40盎司相比，多余部分的脂肪是必不可免的费用了。倘若要精确地按关系式所要求的购买的话，那么约翰会花去更多钱。（须知，价格是不能改成正好让饮食制问题获得最简单的解法的。）

非零和对策①

我们只打算向你谈一谈这些对策的本质。假如我们有意多做一些，那就得敢冒落入数学深渊的风险，并且是落入充满矛盾的深渊。

在零和对策中，支付乃是资本精确的交换：一位局中人所赢（收入）的数目丝毫不差地就是另一位局中人所输（支出）的数目。我们曾部分地把这个原理应用于对抗自然的对策之中。我们在那些对策中是假设局中人（人）是在同一位合乎他对支付矩阵表的评估的，并且能够预先采取合理的对抗措施的对手（自然）进行对策，而替局中人（人）统计策略的。这就导致局中人（人）采取各种小心过细的策略。因而，他就无法获得他若是同一个傻里傻气的对手对抗时所能获得的那么多的收入。在该原理中有一种能改善此状况的过

---

① 这些对策也可称为“不同支付的”对策。假使两位局中人支付值的总和不等于零，但是常数，那么对这种对策的分析在形式方面仍可归结为零和的实验对策。不过，假使矩阵表中各种元素的支付值总和不一样，那么就有“不同支付的”对策。这样的对策将提出两个矩阵表，给每个局中人一个表。恰正是这些对策在这里被称为“非零和对策”。——俄译者注。

得去的办法，那就是揭破自然的策略（这在一系列场合中是有可能的），然后利用其方法中的弱点。

非零和对策包含有某种类似自然的元素。在这里，一位局中人的收入不一定都得等于另一位局中人的支出，因为他们双方可能同时既有输又有赢。为了保留我们所采用的分析形式，我们可以将自然看作参加对策的一个要素，吸收各局中人损失的价值，同时补充他们的收入。这样的对策可用两个矩阵表叙述，它可以具有如下的形式：

		自然（红者）		
		1	2	3
蓝者	1	1	6	2
	2	3	0	3
	3	4	2	0

		红者		
		1	2	3
自然（蓝者）	1	6	0	3
	2	5	4	3
	3	0	1	4

这样，自然就具有两面派的面孔：一面用于蓝者，另一面则用于红者。

假如蓝者只看到左边的矩阵表，并且将它当成一般的两人零和对策，那么他就必须依从相对频数为4:6:1的混合策略，而他的平均收入为$2^{4}/_{11}$，并且支付者将是自然（红者）。右边的矩阵表同样也能导致红者采用0:1:3的策略，并且付出被自然（蓝者）吸收的$3^{1}/_{4}$。自然（蓝者）和自然（红者），如果愿意的话，可以均分其收入和支出。

在一位局中人对抗自然的对策场合，蓝者若是研究过自然的行为，同时又利用了他得到的信息的话，蓝者本可以获得大于$2^{4}/_{11}$的收入。但是，在我们这个例子中，自然（红

者）却是一只蒙着羊皮的狼，因为红者躲藏在暗处操纵着它的策略。这里存在一个以红者为将军，以自然（红者）为银行家的联盟。完全相同的联系也存在于蓝者和自然（蓝者）之间。因此，如果蓝者为了多收入一些，而放弃4:6:1的最优策略，那么他就可能被正注视着事件进程的红者所击败。

然而，也有可能存在另外一种情况。我们假定蓝者选择了1:0:0的策略，而红者选择0:1:0的策略。现在，蓝者的收入变成6，而不是$2^4/_{11}$，而红者的支出则由$3^1/_4$变成了0。这样一来，两个局中人的对策就比原先改善得多了：蓝者可以获得尽可能多的收入，而红者的损失也可以减到尽可能小的程度。由此可以得出一个结论：**蓝者和红者可以根据彼此的利益而结成对抗自然的联盟，以便获取尽可能大的收入。**

这个结论使我们更感到为难。须知，我们要研究的是盗贼之间经常遇到的一个典型问题：怎样分配赃物？假使联盟提供的支付多于各局中人彼此互不依赖时的收获，那么怎样分配剩余的部份呢？应该拟定一种怎样的补充支付值的办法，使得联盟有所成就，收入足够大，并使得联盟成员保持忠诚呢？一位局中人在何种场合必须为了惩罚另一位局中人而容忍较不利的结局呢？在这领域中，在寻找那些使局中人能够挑选最佳策略——某些策略组和辅助支付值的方法方面，已经进行了相当多的研究工作。不过，抽象的作品尚需要实践的、实际生活中可遇到的现实的局势的以及实验室的实验方面的认真指导。这个题目虽然十分诱人，但是它肯定完全超出了本书的范围。

结　论

现在我们已经能够做我们在开头还不能做的那件事了。

这就是要象我们在第一章中对于万有引力定律所做的那样，也给对策论本身下个足够准确的定义。由于我们现在已经掌握了丰富的技术术语和语汇，同时，也已经颇为详细地熟识了问题的分析和表达，所以我们将可以理解那些在本书开头看来似乎很难懂的想法了。

我们以下引述的对策论定义仅止与本书中包括的材料有关。某些问题，如无限对策、非零和对策和几个局中人的对策，还有待于进一步的概括和总结。

对策论是符合如下抽象论述的冲突的分析方法：冲突乃是一种其中存在着利益对立的两群的局势。可以把这种局势看作是两个局中人之间的对策，而各个局中人都代表一个有共同利害关系的群。各个局中人拥有有限数目的策略，在进行一局对策时，他只能从其中选择出一种策略。各局中人的总资本在每局结束时，同它在每局开始时是一样的。每个局中人都希望按照一种能够使自己获得最大的平均收入的谨慎而可靠的预定步骤行动。这个最大的平均收入称为对策的得失，它是可以计算出来的，假如局中人的对策是正确的，那么，他就有把握相信自己一定能获得这个得失。为了达到这个目的，他必须正确地选择自己的策略；而且正确选择策略的方法也是存在的。一个局中人可能向对手隐瞒自己的每局的对策中要选择什么策略；也许，他除了现行的选择之外，并无必要向对手隐瞒其余的全部策略，如此等等的情况产生的后果是各不相同的。

人们授给数学形形色色的头衔。大家经常把它称作科学的皇后和女仆。虽然人们偶尔对它的真实社会地位表示疑惑不解，但是对它的性别却从无异议。实际上，任何一门科学，对于从事它的人们而言，大概都是一位充满诱人魔力的女

性。他们认为自己的工作是极为美好的，同时，科学研究的历史也充满了他们所从事的那项工作的变幻莫测的各种证明。

不仅如此，数学反过来又试图促进和领导（其它科学），这通常是完全出人意料的。它在自由地向前发展着，但往往是在非常意外的方面得到发展。常常有些人用毕生的精力试图推进它在某个方面的发展，却一事无成。从狭小的观点看，可以认为他们的工作是失败的。但是，由于有人促进，科学在某个方面仍然不断向前发展，这些挫折和失败往往成为其它学术部门中完全出人意外的成功的基础。

这样的例子可以举出许许多多。其中有些事例是人所共知的。我们只想简单地讲述其中的一个故事。大家知道，太阳的黑子——太阳表面巨大的火焰涡旋——是周期性地出现的。粒子流和在这时释放出来的能量对于地球，比方说对远距离的无线电通讯，会产生某些影响。我们假定，太阳黑子对地球上的气候也同样有影响，但是这种从属关系的形态迄今为止还不明确。

有位名叫A·I·道格拉斯的天文学家，曾经想过：树木的逐年成长，可以根据树干横断面上的年轮判断出来，而它的生长（情况）又能反映出长期以来的降雨情况，直至太阳黑子对气候产生的影响程度，那么树木年轮上的序列则应该作为太阳活性的记录。

他耗费了近四十年的时间，对于这个问题进行了紧张的研究工作。他所寻求的主要印象按他的记录笔记无疑是显而

易见的，但是其细节部分却是极为错乱不堪和自相矛盾的。矛盾的情形如此严重，以致长期以来使这种分析笼罩着模糊不清的迷雾。不过，他却编成了一份包括有两千年期间树干年轮情况的可靠而精确的年代表。对他而言，这本来只是一件附带的研究工作，然而现在这份年代表却使得利用这本以树干年轮作为根据的历书的考古学家们能够极为精确地（误差不超过一年）按照发掘遗址时找到的破木碎片或者在炉灶里找到的木炭块确定出早期文明阶段遗留下来的古建筑的年代。

对策论最初是由一位打算解决某些经济难题的数学家研究出来的。经济学家对此项研究的最初反应是极端审慎而有节制的，然而，在军事部门工作的科学家们却马上认识到它的希望所在，并着手促进其发展。线性规划反过来又使它再次与经济科学领域建立了联系，同时线性规划在实际生活和工业方面也得到了广泛的应用。对策论的基本概念在统计学理论领域革命时期出现在前线，在这种理论中正进行着似乎彼此完全隔绝的领域间的统一化。这些概念正开始在社会科学方面寻找用场，它们可以阐明人们之间的某些相互关系。对策论今后的发展如何，现在尚难预测。

虽然对策论受到一些规定的限制，但是，它在目前仍然得到应用。不过，对策论的主要功绩是在于它帮助那些与极其错综复杂的各种问题发生冲突的人们了解情况，认定目标。同时，尽管至少在目前，或许在将来一段未定的时期内，对策论尚不能提供这些复杂问题的答案，但是它却指出了对解决以上问题有用的努力的基础和方向。各种策略的概念、各局中人间的差异、随机事件的作用、各支付值的矩阵表象、关于纯策略和混合策略的概念等等，都能够有效地帮助那些研究种种复杂冲突情势的人们弄清面临的问题。

附录：

随机数表

11 16 43 63 18	75 06 13 76 74	40 60 31 61 52	83 23 53 73 61
21 21 59 17 91	76 83 15 86 78	40 94 15 35 85	69 95 86 09 16
10 43 84 44 82	66 55 83 76 49	73 50 58 34 72	55 95 31 79 57
36 79 22 62 36	33 26 66 65 83	39 41 21 60 13	11 44 28 93 20
73 94 40 47 73	12 03 25 14 14	57 99 47 67 48	54 62 74 85 11
49 56 31 28 72	14 06 39 31 04	61 83 45 91 99	15 46 98 22 85
64 20 84 82 37	41 70 17 31 17	91 40 27 72 27	79 51 62 10 07
51 48 67 28 75	38 60 52 93 41	58 99 98 38 80	20 12 51 07 94
99 75 62 63 60	64 51 61 79 71	40 68 49 99 48	33 88 07 64 13
71 32 55 52 17	13 01 57 29 07	75 97 86 42 98	08 07 46 20 55
65 28 59 71 98	12 13 85 30 10	34 55 63 98 61	88 26 77 60 68
17 26 45 73 27	38 22 42 93 01	65 99 05 70 48	25 06 77 75 71
95 63 99 97 54	31 19 99 25 58	16 38 11 50 69	25 41 68 78 75
61 55 57 64 04	86 21 01 18 08	52 45 88 88 80	78 35 26 79 13
78 13 79 87 68	04 68 98 71 30	33 00 78 56 07	92 00 84 48 97
62 49 09 92 15	84 98 72 87 59	38 71 23 15 12	08 58 86 14 90
24 21 66 34 44	21 28 30 70 44	58 72 20 36 78	19 18 66 96 02
16 97 59 54 28	33 22 65 59 03	26 18 86 94 97	51 35 14 77 99
59 13 83 95 42	71 16 85 76 09	12 89 35 40 48	07 25 58 61 49
29 47 85 96 52	50 41 43 19 66	33 18 68 13 46	85 09 53 72 82
96 15 59 50 09	27 42 97 29 18	79 89 32 94 48	88 39 25 42 11
29 62 16 65 83	62 96 61 24 68	48 44 91 51 02	44 12 61 94 38
12 63 97 52 91	71 02 01 72 65	94 20 50 42 59	68 98 35 05 61
14 54 43 71 34	54 71 40 24 01	38 64 80 92 78	81 31 37 74 00
83 40 38 88 27	09 83 41 13 33	04 29 24 60 28	75 66 62 69 54
67 64 20 52 04	30 69 74 48 06	17 02 64 97 37	85 87 51 21 39
64 04 19 90 11	61 04 02 73 09	48 07 07 68 48	02 53 19 77 37
17 04 89 45 23	97 44 45 99 04	30 15 99 54 50	83 77 84 61 15
93 03 98 94 16	52 79 51 06 31	12 14 89 22 31	31 36 16 06 50
82 24 43 43 92	96 60 71 72 20	73 83 87 70 67	24 86 39 75 76

96 99 05 52 44	70 69 32 52 55	73 54 74 37 59	95 63 23 95 55
09 11 97 48 03	97 30 38 87 01	07 27 79 32 17	79 42 12 17 69
57 66 64 12 04	47 58 97 83 64	65 12 84 83 34	07 49 32 80 98
46 49 26 15 94	26 72 95 82 72	38 71 66 13 80	60 21 20 50 99
08 43 31 91 72	08 32 02 08 39	31 92 17 64 58	73 72 00 86 57
10 01 17 50 04	86 05 44 11 97	57 23 82 74 64	61 48 75 23 29
92 42 06 54 31	16 53 00 55 40	24 21 94 10 90	08 53 16 15 78
35 54 25 58 65	07 30 44 70 10	31 30 94 93 87	02 33 00 24 76
86 59 52 62 47	18 55 22 94 91	20 75 09 70 24	72 61 96 66 28
72 11 53 49 85	58 03 69 91 37	28 53 78 43 95	26 65 43 78 51

07 42 85 88 63	96 02 38 89 36	97 92 94 12 20	86 43 19 44 85
35 37 92 79 22	28 90 65 50 13	40 56 83 32 22	40 48 69 11 22
10 98 22 28 07	10 92 02 62 99	41 48 39 29 35	17 06 17 82 52
90 12 73 33 41	77 80 61 24 46	93 04 06 64 76	24 99 04 10 99
63 00 21 29 90	23 51 06 87 74	76 86 93 93 00	84 97 80 75 04
40 77 98 63 82	48 45 46 52 69	02 98 25 79 91	50 76 59 19 30
43 21 61 26 08	18 16 78 46 31	94 47 97 65 00	39 17 00 66 29
96 16 76 43 75	74 10 89 36 43	52 29 17 58 22	95 96 69 09 47
70 97 56 26 93	35 68 47 26 07	03 68 40 36 00	52 83 15 53 81
85 81 26 18 75	23 57 07 57 54	58 93 92 83 66	86 76 56 74 65

37 10 06 24 92	63 64 24 76 38	54 72 35 65 27	53 07 63 82 35
53 40 61 38 55	38 51 92 95 00	84 82 88 12 48	25 54 83 40 75
55 17 28 15 56	18 85 65 90 43	65 79 90 19 14	81 36 30 51 73
40 35 38 48 07	47 76 74 68 90	87 91 73 85 49	48 21 37 17 08
18 89 90 96 12	77 54 15 76 75	26 90 78 81 73	71 18 92 83 77
68 14 12 53 40	92 55 11 13 26	68 05 26 54 22	88 46 00 63 52
51 55 99 11 59	81 31 06 32 51	42 58 76 81 49	88 14 79 97 00
92 21 43 33 86	73 45 97 93 59	97 17 65 54 16	67 64 20 50 51
15 08 95 05 57	33 16 68 70 94	53 29 58 71 33	38 26 49 47 08
96 46 10 06 04	11 12 02 22 54	23 01 19 41 08	29 19 66 51 87

28 17 74 41 11	15 70 57 38 35	75 76 84 95 49	24 54 36 32 85
66 95 34 47 37	81 12 70 74 93	86 66 87 03 41	66 46 07 56 48
19 71 22 72 63	84 57 54 98 20	56 72 77 20 36	50 34 73 35 21
68 75 66 47 57	19 98 79 22 22	27 93 67 80 10	09 61 70 44 08
75 02 26 53 32	98 60 62 94 51	31 99 46 90 72	37 35 49 30 25
11 32 37 00 69	90 26 98 92 66	02 98 59 53 03	15 18 25 01 66
55 20 86 34 70	18 15 82 52 83	89 96 51 02 06	95 83 09 54 06
11 47 40 87 86	05 59 46 70 45	45 58 72 96 11	98 57 94 24 81
81 42 28 68 42	60 99 77 96 69	01 07 10 85 30	74 30 57 75 09
21 77 17 59 63	23 15 19 02 74	90 20 96 85 21	14 29 33 91 94

42 27 81 21 60	32 57 61 42 78	04 98 26 84 70	27 87 51 54 80
17 69 76 01 14	63 24 73 20 96	19 74 02 46 37	97 37 73 21 12
05 68 63 02 43	34 12 40 29 36	50 19 77 98 69	86 49 76 87 09
52 99 24 66 50	89 91 05 73 95	46 95 46 75 36	28 96 88 19 36
94 51 89 39 84	81 47 86 77 50	82 54 96 26 76	31 12 34 98 99
00 18 47 21 86	78 90 67 54 80	61 79 88 16 00	80 01 88 47 42
87 46 26 31 65	79 81 66 16 30	57 66 62 90 55	46 51 80 14 87
88 69 25 87 16	12 27 34 81 76	29 80 56 49 94	66 87 26 22 30
20 09 44 29 62	41 38 21 67 68	06 71 13 49 39	19 59 97 62 47
60 93 58 15 04	50 52 08 21 53	13 93 44 68 85	58 31 58 83 66
51 39 28 59 36	43 89 85 05 96	28 54 99 83 27	99 94 32 53 77
54 23 94 19 18	79 52 64 62 74	40 87 16 18 03	25 76 75 54 84
57 89 27 33 94	07 16 09 02 62	47 70 43 83 55	71 70 88 01 17
02 33 07 47 36	53 27 44 44 68	62 61 11 96 98	09 30 42 92 65
76 11 52 92 47	55 34 25 12 99	03 04 78 39 81	11 91 60 92 67
63 31 28 18 86	29 08 52 01 01	26 46 05 05 01	31 73 11 89 38
27 63 22 15 70	34 27 45 64 26	01 76 42 59 59	69 29 38 98 75
06 33 56 21 11	44 01 45 25 67	11 76 25 48 06	02 65 15 29 12
64 14 28 76 76	21 35 88 87 73	31 73 63 16 95	11 52 36 42 13
28 43 62 54 68	75 23 57 53 70	97 15 54 87 06	52 23 92 18 31
09 52 28 38 55	85 97 31 58 88	31 18 14 96 72	17 23 70 40 24
93 71 41 54 14	93 71 20 27 42	32 11 58 26 83	67 18 28 90 30
15 68 15 35 99	58 18 57 38 40	07 06 87 59 47	71 74 36 92 85
77 71 22 39 14	08 90 74 37 68	26 62 27 41 84	75 16 69 67 48
78 45 35 48 44	61 50 90 12 45	02 80 55 26 76	22 51 94 78 48
24 86 06 82 84	19 36 72 90 73	32 30 15 87 01	04 19 33 01 42
37 28 40 68 44	78 88 75 72 76	26 33 95 69 09	39 33 14 21 01
35 48 85 24 73	37 63 43 25 69	95 27 40 95 08	81 01 24 24 13
51 59 55 99 09	35 22 34 49 91	24 27 53 96 32	05 77 79 88 00
90 66 03 51 71	30 02 19 11 20	36 11 64 21 28	69 40 19 41 99
47 50 50 20 08	20 30 08 71 88	96 19 50 70 59	13 26 63 13 89
13 35 00 84 14	64 04 99 43 77	22 40 89 49 58	19 09 55 80 35
33 00 69 26 90	69 24 89 74 43	53 89 62 35 08	16 22 75 69 29
55 21 66 38 86	06 80 41 18 61	22 56 50 24 75	00 25 87 90 18
21 99 12 62 28	14 80 11 91 92	49 43 82 07 72	60 84 66 97 32
71 02 52 82 12	10 47 42 75 22	65 62 03 46 84	00 21 00 48 63
65 52 21 52 42	84 55 47 45 60	20 24 62 69 41	41 29 80 47 63
27 97 55 49 23	90 65 00 61 70	09 43 30 91 67	35 16 63 27 31
07 30 00 97 04	36 09 96 15 77	95 55 27 34 56	16 57 88 81 40
54 35 71 36 89	19 56 90 38 14	76 05 30 51 50	99 12 56 94 42

00 97 70 44 81	42 04 40 86 49	34 82 23 58 43	78 46 88 23 80
13 92 07 87 61	12 31 19 28 08	07 75 30 40 73	58 52 08 00 22
08 39 53 70 43	37 88 03 41 72	04 20 49 44 34	62 79 88 19 02
46 16 66 72 06	01 61 94 37 69	96 77 01 94 40	29 70 04 20 93
87 76 77 76 07	03 74 20 16 13	65 98 96 28 43	10 91 73 44 58
29 88 09 52 88	21 64 44 65 87	06 64 49 47 84	66 99 56 18 12
36 24 83 66 66	14 89 45 92 73	88 95 04 60 77	34 65 11 20 38
12 38 62 96 56	30 47 42 59 64	21 48 29 54 22	02 00 23 36 71
52 06 87 38 01	52 18 81 94 91	55 13 76 10 39	02 00 66 99 13
41 72 75 21 71	56 71 90 60 54	98 44 18 15 29	59 60 76 52 25

49 31 97 45 80	57 47 01 46 00	57 16 83 04 58	23 89 20 78 25
84 78 67 69 63	12 12 72 50 14	71 88 66 53 34	38 01 30 93 79
64 86 69 52 02	43 98 37 26 55	40 41 85 95 04	52 38 30 72 32
11 84 92 64 82	20 46 19 94 50	28 83 37 66 61	47 27 79 29 35
54 96 61 75 94	57 39 37 32 67	37 88 36 21 24	62 19 94 95 42
10 95 93 33 49	80 71 99 67 51	44 88 23 35 92	66 23 41 38 21
22 78 40 77 83	35 90 30 00 91	19 08 21 38 73	07 18 42 15 66
86 03 76 17 91	33 81 56 39 68	45 31 62 92 83	89 31 85 58 06
80 03 76 50 89	85 91 97 43 91	22 78 85 54 33	31 18 87 48 82
72 75 18 43 59	15 76 91 36 15	08 29 38 61 93	05 02 62 12 55

18 53 20 38 74	66 22 07 90 50	29 22 37 05 41	67 11 58 45 84
22 93 62 20 58	49 17 11 10 27	22 68 18 01 10	31 59 50 92 46
66 39 77 65 10	81 15 00 07 04	74 58 09 03 54	43 74 42 21 78
89 73 02 32 72	65 42 03 50 91	69 09 37 13 64	08 10 79 69 52
81 82 17 53 23	96 06 89 17 24	40 45 69 12 34	58 09 06 53 42
94 37 78 25 54	53 58 61 14 32	72 92 76 73 49	83 96 25 89 12
68 48 54 99 91	53 16 51 98 65	61 86 93 30 93	81 12 90 64 81
07 33 00 71 84	86 78 86 45 77	40 04 81 65 20	07 63 81 07 97
10 99 31 49 30	35 07 23 64 29	68 77 39 76 69	28 65 68 99 38
20 80 11 51 78	64 45 38 33 57	09 77 43 07 51	49 74 01 13 85

79 24 13 53 47	66 85 17 92 47	46 13 93 66 89	82 58 71 35 86
43 59 33 95 55	97 34 55 84 94	26 56 69 53 23	32 99 38 99 88
29 52 26 27 13	33 70 11 71 86	06 76 55 71 41	48 61 71 82 82
88 83 64 72 90	67 27 47 83 62	35 38 49 03 80	12 31 78 97 02
65 90 56 62 53	91 48 23 06 89	49 33 37 84 82	36 19 91 13 55
44 79 86 93 71	07 86 58 17 56	45 59 51 40 44	56 80 69 91 26
35 51 09 91 39	32 03 12 79 25	79 81 91 50 54	76 17 41 22 06
50 12 59 32 23	64 20 94 97 14	11 97 16 22 34	74 85 74 64 01
25 17 39 00 38	63 87 14 04 18	11 45 28 93 18	53 08 42 19 93
68 45 99 00 94	44 99 59 37 18	38 74 68 12 71	96 26 09 81 37

93 36 91 30 44	69 68 67 81 62	66 37 80 29 19	34 01 25 00 80
19 36 05 50 49	94 95 17 63 41	84 01 93 06 90	25 65 67 29 96
47 79 88 98 90	06 89 36 54 83	17 70 12 12 92	14 88 01 53 86
69 22 33 20 07	03 51 36 11 49	32 54 69 20 72	62 52 22 15 04
34 51 15 07 21	84 85 03 41 59	97 13 86 19 19	97 78 92 85 75
54 03 15 93 29	58 96 35 22 20	35 29 22 79 24	55 46 74 30 36
66 72 28 55 15	04 72 39 24 11	02 73 70 81 68	30 04 36 34 50
71 05 90 74 96	38 40 41 81 26	28 26 13 78 44	12 54 31 43 98
45 47 88 60 66	31 13 53 32 43	80 57 33 06 06	48 64 45 30 08
97 24 69 11 21	89 43 72 03 93	77 15 38 85 52	26 84 31 28 44

22 98 22 59 36	96 41 73 48 45	85 14 95 75 04	15 05 93 68 49
48 24 36 29 93	47 13 28 52 48	35 22 97 28 37	36 75 27 16 55
93 51 41 49 15	67 96 08 22 03	40 11 72 43 46	32 18 98 70 74
69 70 79 83 03	93 06 91 62 16	60 87 59 75 45	68 65 29 21 60
87 46 79 17 94	70 81 41 27 43	03 76 93 25 51	74 80 14 16 92
81 00 68 14 98	59 37 53 05 02	94 07 79 22 09	31 50 66 96 06
15 45 88 34 81	50 18 74 33 75	94 37 60 06 66	94 14 52 23 99
33 46 91 25 10	23 09 54 80 16	42 35 41 13 47	90 92 00 38 64
67 19 80 71 76	65 99 61 83 17	81 14 94 32 91	10 81 74 43 48
58 03 79 22 61	85 50 45 56 90	10 63 17 82 38	00 15 74 62 59

84 98 36 83 12	25 51 95 61 58	86 30 00 76 89	14 00 67 77 53
35 55 40 29 35	72 88 96 87 72	19 85 03 96 50	65 22 21 55 63
04 36 81 76 32	50 96 27 19 08	94 46 46 64 32	62 24 31 36 74
81 31 16 04 79	69 98 53 09 52	23 92 14 97 30	21 71 89 23 14
03 82 38 98 87	55 82 87 44 52	72 77 52 37 16	42 85 37 47 93
80 42 26 54 37	38 79 75 62 61	27 81 64 67 04	82 73 50 33 39
61 30 74 94 68	43 34 44 37 00	20 20 77 70 88	17 16 72 45 31
83 87 38 25 57	10 00 28 00 93	59 28 30 44 94	60 72 52 14 31
38 11 01 68 55	28 92 29 37 58	88 73 13 63 76	51 38 35 76 19
43 89 29 11 89	87 22 65 69 35	84 76 26 79 96	75 00 00 17 45

93 68 30 96 64	53 92 74 98 85	20 75 49 23 55	57 95 51 09 40
32 74 80 21 21	11 97 29 69 14	28 06 56 95 64	06 83 55 68 45
49 21 19 29 63	38 62 56 53 12	62 17 57 33 53	84 97 21 77 26
63 36 56 42 24	69 47 55 75 12	11 04 45 04 83	68 82 19 74 26
63 57 62 63 73	44 61 04 37 48	00 33 16 34 22	99 62 27 67 57
41 07 84 70 36	65 52 46 84 66	67 15 72 64 19	37 97 81 65 11
70 84 68 95 58	64 17 31 53 81	87 71 35 08 41	46 27 02 65 08
68 80 06 44 92	20 16 23 27 07	10 28 18 25 25	74 15 58 67 49
44 97 78 95 25	51 26 96 37 47	91 36 77 40 33	67 02 06 90 92
79 35 46 38 47	24 39 55 36 79	40 56 03 69 14	69 17 63 19 18

14 95 42 22 99	40 15 65 26 85	29 22 33 83 83	30 31 57 09 99
01 71 19 84 39	09 44 63 39 37	49 09 54 02 38	81 69 71 24 74
62 32 85 53 28	45 73 89 39 40	27 46 62 69 27	53 34 51 13 79
73 00 46 21 09	81 90 77 10 77	57 46 37 00 45	65 12 34 90 70
34 21 88 94 45	05 60 95 23 36	50 55 89 22 42	52 73 28 15 02
99 15 90 19 68	45 88 68 68 75	28 41 39 59 18	44 15 64 69 59
92 85 82 99 49	15 81 79 33 72	56 65 74 31 93	58 13 05 42 73
27 39 69 74 77	65 55 47 16 01	13 12 16 88 67	95 76 35 96 67
37 10 34 53 09	30 12 94 33 80	96 99 68 93 56	22 78 46 01 84
57 34 79 70 12	48 42 82 06 06	60 74 22 22 26	89 99 32 45 97

29 41 72 09 72	84 13 42 91 66	71 99 34 28 19	28 79 91 30 95
70 18 50 54 60	07 35 38 58 55	11 83 80 22 91	89 88 24 16 13
06 39 35 20 17	21 23 62 05 30	14 30 05 53 19	47 90 83 92 32
42 60 59 24 74	09 36 14 24 04	33 72 24 77 22	12 54 72 97 59
26 48 34 88 73	84 26 03 32 85	51 27 58 48 21	87 44 30 24 91
93 60 97 74 25	57 26 86 93 20	13 56 80 08 25	80 83 58 36 39
19 79 00 32 65	68 47 42 96 78	08 45 60 14 75	40 31 77 20 77
63 43 46 72 51	20 51 08 06 27	62 61 86 40 27	64 47 75 04 32
76 63 64 27 71	12 58 35 63 29	59 51 22 52 49	42 18 50 96 22
51 25 87 43 30	47 75 15 26 72	10 99 59 19 22	50 21 71 41 87

13 26 01 42 38	88 39 15 08 58	60 73 55 89 65	58 49 20 96 66
31 81 15 09 35	89 51 01 55 66	22 09 62 63 38	30 24 00 43 43
48 83 26 95 24	32 11 34 66 73	24 96 59 71 07	41 85 68 52 96
32 36 71 84 57	03 31 22 55 64	75 10 99 31 42	91 95 16 88 94
90 34 61 74 76	71 03 92 14 97	64 00 15 42 64	71 66 79 42 62
98 51 30 86 79	69 41 38 20 67	68 25 07 45 01	48 84 60 91 00
08 48 41 56 17	82 79 00 83 24	95 09 12 70 82	73 94 95 95 33
60 04 28 75 62	49 72 82 64 00	10 11 21 06 30	82 87 33 93 12
87 65 38 64 09	09 27 73 83 79	09 93 45 75 87	44 00 52 10 90
35 71 10 03 98	30 49 45 09 23	33 30 85 14 41	13 80 43 26 09

46 48 33 27 22	74 79 96 02 77	09 29 94 26 17	94 65 41 13 15
60 85 80 63 37	20 22 03 49 52	98 21 86 97 10	03 42 79 92 55
70 78 30 14 52	87 66 12 40 28	41 83 04 04 72	46 04 10 89 52
65 34 64 30 42	62 13 43 22 85	35 20 18 56 72	66 68 85 39 48
96 34 95 21 64	23 29 87 22 17	41 64 06 30 18	74 28 09 16 70
63 46 91 34 59	11 09 19 66 46	37 84 93 43 89	55 97 49 94 43
60 57 97 54 98	97 81 58 61 51	60 23 67 57 05	83 33 98 49 23
31 01 87 40 81	01 49 40 61 65	70 80 28 81 89	11 59 41 34 47
00 04 73 38 02	73 34 25 43 38	43 35 49 39 50	54 76 53 75 53
55 75 48 69 00	87 93 10 12 38	15 44 92 88 47	82 63 56 85 43

38 05 83 03 46	35 72 27 88 49	92 82 54 05 36	76 78 04 42 64
06 90 44 32 00	89 09 23 09 74	00 70 16 65 89	04 62 25 13 54
48 43 07 91 89	59 69 09 38 30	59 93 99 51 37	65 79 94 11 47
78 55 65 87 76	35 37 02 47 74	57 49 08 58 05	04 16 80 74 03
07 66 20 77 12	70 41 09 94 28	76 51 36 93 39	33 70 13 21 84
98 74 51 23 38	11 08 80 54 54	06 87 15 01 32	50 01 02 40 89
52 92 38 13 43	14 90 82 38 96	01 52 90 94 99	57 66 00 23 09
35 16 59 31 08	32 06 82 15 47	54 73 97 37 96	14 28 37 69 59
65 22 11 22 07	66 07 95 94 34	94 94 61 72 41	82 75 41 80 73
74 45 35 59 75	85 46 39 45 67	49 80 03 00 54	85 78 02 30 94

03 49 66 06 56	69 73 55 50 53	15 39 38 25 29	15 76 08 97 88
64 25 28 09 87	44 41 63 14 38	26 05 53 00 56	15 22 61 10 81
49 22 51 16 47	69 73 37 99 39	86 30 53 50 43	66 21 97 48 31
62 47 61 93 65	16 56 86 25 09	89 14 62 53 24	22 75 93 56 01
21 11 93 11 66	78 38 51 48 75	86 85 79 94 04	91 54 77 49 34
35 08 65 00 39	71 25 14 57 69	27 90 84 89 44	09 01 75 43 97
33 33 07 87 01	88 53 64 13 98	86 41 32 07 09	41 58 96 36 41
68 34 64 53 55	37 07 24 08 32	33 91 55 38 90	19 88 73 41 08
55 52 63 17 47	57 30 90 92 38	78 74 26 99 71	30 14 87 26 47
86 02 05 57 48	08 63 66 37 73	07 22 80 50 82	72 82 19 10 26

练 习 的 解 答

当读者把自己的结果同下列练习答案进行比较的时候，必须注意如下的评注：

一，所有的相对频数都以最简单的形式列举出来，即它们已经约过公因子。这样，8∶24∶16的相对频数就记为1∶3∶2。

二，虽然我们在开头数章没有让你注意到这样一点：即许多对策拥有不止一个基本解，但是我们仍然引用了练习中最初几组对策的全部基本解。各种二者择一的解都标以(1)、(2)，如此等等。不过并不排除这样的可能性：你有可能求出并未出现在我们的表格上的正确解。在此种场合，你的解就是我们的解的两种或三种的组合。

对于最后几组属于4×4和更多策略的对策的练习，我们不想提供全部的解。不过，当你能够了解这些练习时，你就已经能够自己判断出你的解的正误了。

因为对策的得失数值是单值的，所以你的结果应当始终同我们的解的数值完全一致。

练习一

练习题	蓝者 1	2	红者 1	2	对策的得失
1	1	0	0	1	4
2	0	1	1	0	6
3	0	1	0	1	−7
4	0	1	0	1	6
5	0	1	0	1	3
6	0	1	1	0	3
7	1	1	1	3	5/2
8	1	1	1	3	3/2
9	1	1	1	3	1/2
10	1	1	1	3	0
11	1	1	1	1	0
12	1	1	1	1	−1/2
13	1	1	1	1	9/2
14	1	1	1	1	93/2
15	1	1	5	4	0
16	8	9	10	7	5/17
17	0	1	0	1	5
18	3	1	1	1	−1
19	10	1	10	111	1010/11
20	4	3	1	1	0

练习二

练习题	蓝者 1	2	红者 1	2	3	4	5	6	7	8	对策的得失
1	1	0	0	1	0						0
2	1	0	0	1	0	0					-6
3	3	1	0	1	7						7/4
4	7	9	3	0	0	0	0	13	0	0	293/16
5	1	1	0	1	1	0					5/2
6	10	11	0	0	1	20					11/21
7	5	7	7	5	0	0	0				25/12
8	5	4	5	0	0	1	0				-1/3
9	7	6	0	19	0	0	7				-3/13
10	5	3	0	7	0	9	0				-13/8
11	5	7	0	1	0	1					7/2
12	7	6	0	7	6						42/13
13(1)	1	1	4	5	0	0	0	0			5
13(2)			3	0	5	0	0	0			
13(3)			2	0	0	5	0	0			
13(4)			0	1	0	0	4	0			
13(5)			0	0	1	0	3	0			
13(6)			0	0	0	1	2	0			
13(7)			0	3	0	0	0	4			
13(8)			0	0	3	0	0	3			
13(9)			0	0	0	3	0	2			

练习题	蓝				者				红	者	对策的得失
	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	
14	0	0	1						1	0	9
15	1	0	0	0	1				1	1	3
16	1	0	0						0	1	−3
17	1	1	0						1	1	1/2
18	0	0	1						1	1	1
19	1	0	0	0	0	1			1	1	2
20	1	0	0	2	0				2	1	19/3

练习三

练习题	蓝	者		红	者		对策的得失
	1	2	3	1	2	3	
1(1)	0	0	1	1	0	0	4
1(2)				1	0	1	
2	0	0	1	0	0	1	5
3	0	1	0	1	0	0	2
4(1)	0	1	0	0	0	1	4
4(2)				1	0	2	
4(3)				0	9	7	
5	1	1	1	1	1	1	2/3
6	1	1	1	1	1	1	0
7	2	3	2	2	3	2	8/7
8	1	2	4	1	2	4	15/7
9	18	5	22	25	9	11	142/45
10	21	19	16	16	31	9	67/56
11(1)	1	0	1	1	0	1	1
11(2)				0	1	0	
12(1)	1	0	1	1	0	1	3
12(2)	0	1	0				
13(1)	0	1	1	9	21	4	3/2

13(2)				1	1	0	
14	7	0	1	1	0	3	3/4
15	0	7	1	1	0	3	3/4
16	1	0	6	3	0	4	31/7
17	0	1	2	1	0	1	2
18	2	5	0	0	6	1	12/7
19(1)	0	5	2	3	4	0	22/7
19(2)				6	1	7	
20	1	1	0	3	1	0	5/2
21	36	11	10	10	25	22	226/57
22	15	19	40	24	35	15	297/74
23	1	1	1	1	1	1	10/3
24	1	1	1	8	2	11	509/3
25	3	0	4	6	0	1	24/7
26	0	1	9	3	0	2	23/5
27	4	5	0	8	0	1	40/9
28	11	9	15	8	14	13	108/35
29(1)	0	5	3	1	4	3	23/8
29(2)				5	0	3	
30	4	1	0	2	3	0	12/5
31	1	1	1	1	1	1	3

练习四

练习题	蓝者 1	2	3	红者 1	2	3	4	5	6	对策的得失
1	0	1	0	0	0	1	0			4
2	0	0	1	0	0	0	1			6
3	1	8	9	9	8	1	0			59/18
4	7	5	1	0	4	3	6			15/13
5(1)	1	1	0	1	1	0	0			1/2
5(2)				0	1	1	0			

5(3)				0	0	1	1			
6(1)	1	1	0	1	0	3	0			3/2
6(2)				1	0	0	1			
6(3)				0	1	1	0			
7	10	9	23	0	5	8	1			55/14
8(1)	0	1	1	0	0	1	0			3
(2)	0	1	3							
9(1)	3	3	2	17	0	3	12	0		17/8
9(2)				11	0	9	0	12		
10(1)	1	1	1	1	1	1	0	0	0	10/3
10(2)				0	0	0	1	1	1	
10(3)				3	2	0	1	0	0	
10(4)				4	4	0	0	1	0	
10(5)				2	0	0	3	0	1	
10(6)				0	1	7	0	0	1	
10(7)				0	4	0	0	7	4	
10(8)				0	0	4	1	0	1	

练习题	蓝者							红者			对策的得失
	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	
11(1)	1	0	0	0	1			1	0	2	0
11(2)	0	1	0	1	0			0	2	1	
11(3)	0	0	1	0	0						
11(4)	0	2	0	0	1						
11(5)	1	0	0	2	0						
12(1)	0	0	13	0	2	0		3	8	10	−68/3
12(2)	13	0	0	0	17	0		4	6	11	
13	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1/3
14	0	0	13	2				1	0	4	17/5
15(1)	0	0	0	1				1	0	0	3
15(2)	1	0	0	1							

练习五

练习题	蓝者 1	2	3	4	5	6	红者 1	2	3	4	5	6	7	8	对策的得失
1(1)	0	1	0	0			0	0	1	0					2
1(2)	0	1	1	0											
2	0	1	0	0			0	0	0	1					5
3(1)	1	0	0	0			1	0	0	0					3
3(2)							1	0	0	2					
4(1)	1	0	0	0			0	0	1	0	0				0
4(2)							0	0	0	0	1				
4(3)	0	0	0	1			0	0	1	0	0				
4(4)							0	0	0	0	1				
5	8	3	7	9			5	7	3	3					23/9
6	76	92	78	89			61	72	161	41					688/335
7	109	130	11	276			132	235	68	91					2101/526
8	0	0	1	2			1	1	0	0					5
9	38	0	0	21	12	0	0	49	8	14					147/71
10	61	72	161	41			76	0	0	92	78	89	0	0	688/335
11	28	33	31	21	29		4	35	6	57	40				149/142
12	520	247	233	348	378		332	849	34	266	245				6703/1726
13	5	51	9	25	19		1096	2086	493	139	764				324/109
14	415	540	660	245	405		273	352	535	665	440				2765/453
15	0	0	1	2	0		1	1	0	0	0				5
16	0	0	0	5	4		0	2	0	1	0				8/3
17	2	0	1	0	0		0	0	0	5	4				11/3
18	36	11	0	0	10		10	25	0	22	0				226/57
19	10	9	23	0	0	0	0	0	5	8	0	1			27/14
20(1)	1	1	1	1			0	1	3	0	6				0
20(2)							6	5	3	6	0				
21	132	0	235	68	0	91	109	130	11	276	0	0			2101/526
22	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1				3

练习六

蓝者 1	2	3	4	红者 1	2	3	4	对策的得失
7	0	0	4					
17	7	0	12					
0	28	51	65	0	0	1	3	0
28	0	3	17					
0	0	1	1					

文　献

Von Neumann J.,Morgenstern O. Theory of games and economic behaviour,Princeton;1953.

Contributions to the theory of games,vol.1,Editors H. W.Kuhn, A. W. Tucker.Annales of Math. Studies, № 24, Princeton,1950.

Contributions to the theory of games, vol. 2. Editors H. W. Kuhn,A. W. Tucker. Annales of Math. Studies, № 28,Princeton,1953.

Contributions to the theory of games, vol. 3. Editors M. Dresher,H. W. Kuhn,A. W. Tucker,P. Wolfe. Annales of Math. Studies,№ 39,Princeton,1957.

Contributions to the theory of games, vol. 4. Editors R. D. Luce,A. W. Tucker. Annales of Math. Studies,№40, Princeton,1958.

H. W. Kuhn. Lectures on the theory of games. Annales of Math,Studies,№ 37,Princeton,1957.

Karlin,Samuel. Mathematical methods and theory of games Programming and Economies, 2 vv. Addison—Wes-ley Publ. Comp.Reading,Massachusetts,1959.